导数

iNx

目录

1 引言及说明

导数, 在高中数学中仍是在研究初等数学的内容. 在大题中, 其唯一是指用途就是—判断函数单调性.

本文尽量地将题目按照题型分类讲述, 内容大致从浅到深, 不会直接使用高级的或者鲜为人知的结论. 力求将题目理解得更深刻, 使得对导数这一 "杂" 有更深了解, 在备考时对即将到来的考试有更好的把握, 尽量让读者避免多刷题而脑袋空空, 看题做题, 没有题就不知道该怎么办的情况.

本文主要分为三个部分: 双变量问题, 恒成立参数问题, 不等式证明. 重点放在不等式的证明. 其实导数题就是在研究一些不等式, 其逻辑性非常重要. 本文重在思想分析和技巧的介绍, 强调逻辑性, 叙述严谨性和证明方法规范性, 使废话尽量少并淡化详细的证明解答过程. 题目一般也不会整题出现, 以突出重点并节约时间.

题目在清楚来源的情况仍会标明, 注上 "*" 的是原创题. 本文最后附上必备基本知识, 尽量让文章受众可以更广, 只要知道如何求导便能完全理解本文. 当读者发现未知的概念或者不等式且在正文中没有讲解, 请查阅附录.

在准备这篇文章的时候, 已经很久没有动过导数题, 感觉也没有以前好, 所以主要还根据以前的题目来讲解. 可能在部分地方出现纰漏, 欢迎读者指出. 最后不等式的部分没有单纯的不等式证明, 这类题目涉及的技巧比较多, 也几乎不会出现在考题中, 本人能力有限, 没有再做讲解. 最后还要感谢为本文提供题目的**蔡嘉贤**, **杨文龙**, *Dylan*. 由于 *Dylan* 过于出名, 后文中会将来源其知乎的题目前标明 "#".

2 极值点偏移

先看一道例题.

$\boxed{\text{例题 1}}$ 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} \quad (x \in R)$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 证明:

$$x_1 + x_2 > 2$$

.

分析:

首先都是不管三七二十一, 求导: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$. 因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1) \uparrow, (1, +\infty) \downarrow$. 也就是说 1 刚好是极大值点, 而所求 $x_1 + x_2$ 和 2 的关系体现一种对称性. 若 $x_1 + x_2 = 2$ 则可以推知函数图像关于直线 $x = 1$ 对称, 所以现在的 $x_1 + x_2 > 2$ 意义是什么? 注意: 导数的正负可以代表函数的单调性; 但实际上, 其绝对值可以代表函数的增 (减) 速. 容易知道, 对于任意的 $x_1' + x_2' = 2 \quad (x_1' < 1)$ 都有 $|f'(x_1')| > |f'(x_2')|$. 也就是说 $f(x)$ 在极值点右端其实减少得比较慢. 实际上, 若画出 $f(x)$ 的图像 (见图 1), 可以看出 B 点相对于 A 点距离 P 点很远, 特别的, 当 $x_1 \to 0^+$ 时, $x_2 \to +\infty$, 故称为极值点偏移. 但是在考试的导数大题中严格来讲是不允许画图的, 包括前文所述的导数绝对值来表示增 (减) 速都不能使用. 因为都有一个很严肃的问题, 高中生并不能用已有知识清楚地解释这些, 这些只能存在于理解之中. 导数最重要的部分还是逻辑.

知道了本题的实质, 进一步分析解答会方便许多. 重新思考本题, 主要思想应该是消元, 因为并不知道如何对多元函数求导. 因此从条件出发可以知道条件 $f(x_1) = f(x_2)$ 应当用于消元. 另外从结论出发可以知道应当要构造函数 (大部分导数题中的不等关系证明都是由函数单调性得来). 知道这些后需要打破原来的对称性[1]. $x_2 > 2 - x_1$ 从而实现 x_1, x_2 的分离. 因为极

[1]因为一元导数的限制, 在绝大多数导数的证明或解答过程, 都是极不对称的.

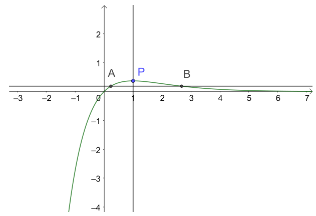

图 1: $f(x)=\frac{x}{e^2}$ 图像

值点的特性, 不等号两端会在同一单调区间中, 同时套上 $f(x)$ 即可化单变量. 在此建议消去 x_2 (一般设$x_1<x_2$), 这是出于严谨性的考虑, 后文会再提到.

下给出本题的作答:

证明. 对 $f(x)$ 求导,

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$$

故: $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调增, 在 $(1,+\infty)$ 单调减.
因此不妨设 $x_1<1<x_2$.
原不等式 $\Leftrightarrow x_2>2-x_1\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)<f(2-x_1)$,
令 $F(x)=f(x)-f(2-x)\quad(x<1)$, 并且注意到 $F(1)=0$
因此原不等式成立 $\Leftarrow F'(x)>0$. 因为 $x<1$, 故

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)+f'(2-x)\\&=\frac{1-x}{e^x}-\frac{1-x}{e^{2-x}}\\&=(1-x)(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2-x}})\\&>0\end{aligned}$$

原不等式得证. □

观察过程发现 $F'(x)$ 符号的判断其实很容易, 因为可以因式分解. 一边是**多项式**, 另一边虽然有指数函数, 但仍是易于判断符号的初等函数. 其实大部分的极值点偏移类型的题目都是由指对函数与多项式相乘产生的.

上文就大概讲清楚了极值点偏移, 例题 1 是一道非常常规简单的题目, 绝大多数人都是知道怎么做的. 在此由其引入, 由简单的题目来体会更深刻的东西. 但是这样的题目显然挑战性是很小的, 因此极值点偏移只在 16 全国卷 I 出现过一次. 如何使一道题变得复杂? 导数题中常见的就是添加参数, 还有就是更改函数.

例题 2 [2016 全国卷 I] 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$, 其中 $a>0$;

(2) 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1+x_2<2$.

分析:

此处出现了参数 a, 所以问题在于是否要消去参数. 因为由前一题其实可以可以看出**零点**这个条件并不是必须的, 只要保证 $f(x_1)=f(x_2)$ 即可. 但是本题如果将 a 分离会发现为求导带来巨大麻烦, 并且 a 提供的范围将无效.

证明. $f'(x) = (x-1)e^x + 2a(x-1) = (x-1)(e^x+2a) \Rightarrow (-\infty, 1) \downarrow, (1, +\infty) \uparrow$.

$$\Leftrightarrow x_2 < 2 - x_1$$
$$\Leftrightarrow f(x_2) < f(2 - x_1)$$
$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(2 - x_1)$$

令 $F(x) = f(x) - f(2-x) \quad (x < 1)$, 故

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + f'(2-x) \\ &= (x-1)(e^x + 2a) + (1-x)(e^{2-x} + 2a) \\ &= (1-x)(e^{2-x} - e^x) > 0 \\ F(x) \uparrow &\Rightarrow F(x) < F(1) = 0 \end{aligned}$$

□

注: 例题 2 的证明并不十分严谨规范, 为缩短文本长度和节省时间, 只写出了主要的步骤而不影响理解. 下面的题目解答也将类似.

接下来看一道 “参数问题”.

$\boxed{\text{例题 3*}}$ 已知函数 $f(x) = e^x - ax \quad (x \in R)$ 有两个不等根 x_1, x_2, 求证:

(1) $\quad x_1 + x_2 > 2$;

(2) $\quad x_1 + x_2 < 2\ln a$.

证明. (1)

$$\begin{cases} e^{x_1} = ax_1 \\ e^{x_2} = ax_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$$

故与例题 1 相同.

(2)

$$f'(x) = e^x - a \Rightarrow (-\infty, \ln a) \downarrow, (] \ln a, +\infty) \uparrow$$

余下步骤均是套路. □

在此可以看到参数通过不同的处理可以得到不同的结果, 同样也看到一个函数其实可以有不同的变形. 通过此题, 得到一个对于参数处理的方法, 即观察参数是否对结果有贡献, 如题 (1) 求证式子并无参数而题 (2) 有参数; 因此题 (1) 中的参数很有可能是无用的, 而题 (2) 是肯定有用的.

下面有两题比较有难度的变式题.

$\boxed{\text{例题 4}}$ 已知函数 $f(x) = x\ln x, g(x) = \frac{x}{e^x}$;

(1) 记 $F(x) = f(x) - g(x)$, 判断 $F(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 零点个数;

(2) 记 $F(x)$ 在 $(1, 2)$ 零点为 $x_0, m(x) = min\{f(x), g(x)\}$, 若 $m(x) = n \quad (n \in R)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两个不等实根 x_1, x_2, 判断 $x_1 + x_2$ 与 $2x_0$ 的大小关系.

(1) 解:

$F(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{e^{x}}=G(x)=0$,

$$\because G(x)\uparrow \text{且}\begin{cases}G(1)=0-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}<0\\ G(2)=\ln 2-\frac{1}{e^{2}}>\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{2}}>0\end{cases}$$

因此 $\exists$ 唯一的 $x_0\in(1,2)$ 使得 $F(x_0)=0$, 故 $F(x)$ 有且只有一个零点.

(2) 解:

$$m(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(1,x_0)\\ g(x), & x\in(x_0,+\infty)\end{cases}$$

先不进一步解答, 首先由 $x_0\to 1$ 时, $x_2\to+\infty$ 得知 $x_1+x_2>2x_0$. 一般这种接近证明题不会要分类讨论.

仍是先走套路,

$$\Leftrightarrow x_2>2x_0-x_1$$

注意: 此处便不再方便将 x_1 放在一边, 因为这样 $2x_0-x_2$ 可能小于零, 而这是不在定义域内的. 因此建议总是把 x_2 写在一边以省去这部分的逻辑问题考虑.

注意到 $g'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}\Rightarrow g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 单调减.

$$\Leftrightarrow g(x_2)<g(2x_0-x_1)$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)-g(2x_0-x_1)<0$$

$$\begin{aligned}\text{令}t(x)&=f(x_1)-g(2x_0-x_1)\quad(x\in(1,x_0))\\&=x\ln x-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}\\&=x\ln x+\frac{x-2x_0}{e^{2x_0-x}}\end{aligned}$$

按照一般套路, 现在应该要能证明 $t'(x)>0$ 即可.

不妨一试,

$$\begin{aligned}t'(x)&=f'(x)+g'(2x_0-x)\\&=\ln x+1+\frac{1+x-2x_0}{e^{2x_0-x}}\end{aligned}$$

这个式子下一步如何变形证明其大于零才是本题关键, 但是前面各种逻辑方面的处理足够让不少人 "误入歧途" 或者放弃了. 这里主要和前面几个例题都不相同, 前面的由于多项式对同一个函数进行调整最终可以因式分解. 但在此很难产生有效的因式, 读者可以一试.

在此全文将第一次使用不等式进行放缩. 要证明

$$\ln x+1-\frac{2x_0-x-1}{e^{2x_0-x}}>0 \tag{1}$$

对此进行处理一个是从 $\ln x$, 另一个是从 $\frac{2x_0-x-1}{e^{2x_0-x}}$ 进行放缩. 放缩一般原则是化繁为简并且放的“维度” 尽量小, 在此对 $\frac{2x_0-x-1}{e^{2x_0-x}}$ 进行放缩.

$$\begin{aligned}\text{不等式(1)}LHS &> \ln x + 1 - \frac{2x_0 - x - 1}{2x_0 - x + 1} \\ &> \ln x > 0\end{aligned}$$

得证.

导数题往往变形是令人头疼的, 往往难以有方向, 正向与逆向的变形都有可能会出现. 如果 $t(x)$ 不直接求导, 而是先一步放缩

$$x\ln x + \frac{x-2x_0}{e^{2x_0-x}} < x_0(\ln x - \frac{1}{e^{2x_0-x}})$$

这么处理可以把多项式和指对分离方便进一步分析, 欲证

$$\ln x - \frac{1}{e^{2x_0-x}} < 0$$

对于指对, 几乎只有单调性来判断最值, 并且注意刚才的放缩其实是不等号取到等号的条件. 但是上函数并不能直接判断单调性, 此时再求导:

$$(\ln x - \frac{1}{e^{2x_0-x}})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x_0-x}} > \frac{1}{x_0} - \frac{1}{e^{x_0}} > 0$$

因此 $\ln x - \frac{1}{e^{2x_0-x}} < \ln x_0 - e^{-x_0} = 0$. 注意这里用到了**隐零点** x_0 的相等关系.

$\boxed{\text{例题 5}}$已知 $f(x) = e^x(x - \frac{1}{x} - 2) \quad (x > 0)$ 且 $x_1, x_2 > 0$ 满足 $f(x_1) + f(x_2) = -4e$. 求证: $x_1 + x_2 \geq 2$.

当这个函数还看不是很清楚的时候, 就直接求导:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}e^x$$

所以可以看到 $f(x)$ 单调递增, 并且 $f(1) = -2e$, 也即是和刚才极值点偏移的轴对称不同, 现在是中心对称. 先不慌, 仍然按照前面的方法先消元试一试.

$$\begin{gathered}\Leftrightarrow x_2 \geq 2 - x_1 \\ \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(2-x_1) \\ \Leftrightarrow -4e - f(x_1) \geq f(2-x_1) \\ \text{令}F(x) = f(x) + f(2-x) + 4e \quad (0 < x \leq 1)\end{gathered}$$

欲证 $F'(x) > 0$,

$$\begin{aligned}F'(x) &= f'(x) - f'(2-x) \\ &= \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}e^x - \frac{(x-1)^2(3-x)}{(2-x)^2}e^{2-x} \\ &= (x-1)^2(\frac{x+1}{x^2}e^x + \frac{x-3}{(2-x)^2}e^{2-x})\end{aligned}$$

下一步怎么处理想必读者都已清楚, 为方便叙述令 $h(x) = \frac{x+1}{x^2}e^x, m(x) = h(x) - h(2-x)$. 欲证 $F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow m(x) \geq 0$, 注意到 $m(1) = 0$, 即欲证 $m'(x) \leq 0$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= e^x(\frac{-x-2}{x^3} + \frac{x^2+x}{x^3}) \\
&= \frac{e^x}{x^3}(x^2-2) \\
m'(x) &= h'(x) + h'(2-x) \\
&= \frac{e^x}{x^3}(x^2-2) + \frac{e^{2-x}}{(2-x)^3}(x^2-4x+2)
\end{aligned}$$

计算到这里发现似乎绕了一圈却没有得到实质性结果. 这时候很有可能不是正常做法了, 实际上 $m(x) \geq 0$ 和 $m'(x) \leq 0$ 本来就是不等价的, 但是导数题的关键在于单调性, 所以题目总是能这样做出来, 但是我希望在这样做的时候能够明白其中的关系. 现在我们继续往这个角度思考, 对式子进一步观察, 很明显

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{2}$$

这边 $x \in (0,1] \subseteq (0, \sqrt{2})$, 但是 $2-x \in [1,2)$ 有一部分 $(\sqrt{2}, 2)$ 超出了可以使其小于零的范围. 所以只需处理这一部分即可, 注意到 $x \to 0^+$ 时, $h'(x) \to -\infty$, 其实可以发现, 当 x 越小时, $h'(x)$ 会变小得非常快, 所以 $m'(x)$ 很有可能不止是小于零, 而是远小于零. 于是放缩成为可能, 下面给出一种放缩法:

要证明: $m'(x) \leq 0$.

证明. (1) 若 $2-\sqrt{2} \leq x \leq 1$, $2-x \leq \sqrt{2}$. $h'(x) \leq 0, h'(2-x) \leq 0$, 所以 $m'(x) \leq 0$.

(2) 若 $0 < x < 2-\sqrt{2}$. 此时, $2-x \in (\sqrt{2}, 2)$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x}{x^3}(x^2-2)\right)' &= e^x\left(\frac{2x \cdot x^3 - 3x^2(x^2-2)}{x^6} + \frac{x^2-2}{x^3}\right) \\
&= \frac{e^x}{x^6}(x^5 - x^4 + -2x^3 + 6x^2) \\
&= \frac{e^x}{x^6}\left(x^4(x-1) + 2x^2(3-x)\right) \\
&> 0(\text{当}x \in (\sqrt{2}, 2)\text{时})
\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{e^{2-x}}{(2-x)^3}\left((2-x)^2-2\right) < \frac{2e^2}{8} = \frac{e^2}{4}$$

. 注意到: 此时

$$\frac{e^x}{x^3}(x^2-2) < -\frac{e}{x^3}$$

.

$$
\begin{aligned}
m'(x) \le 0 \Leftarrow e(\frac{e}{4} - \frac{1}{x^3}) < 0 \\
\Leftrightarrow x^3 < \frac{e}{4} \\
\text{又} \because \frac{e}{4} > \frac{2.5}{4} = \frac{25}{40}, \\
\text{而} x^3 < (2-\sqrt{2})^3 < (2-1.4)^3 = (\frac{3}{5})^3 < \frac{3}{5} = \frac{24}{40} < \frac{e}{4}.
\end{aligned}
$$

故 $m'(x) < 0$. □

但这个其实非常难想, 还需要不断尝试, 即使发现这个条件可以放得很宽 (因为其实比 0 小很多), 但还是很难处理. 接下来从一个比较完美的角度切入, 也是正解.

首先化繁为简可以提取 e^x, 得到

$$
(x-1)^2 e^x (\frac{x+1}{x^2} - \frac{3-x}{(2-x)^2} e^{2-2x})
$$

这时候应该可以注意到一个不等式

$$
e^x \ge x+1 \tag{2}
$$

这时候这个很丑的分母 $(2-x)^2$ 令人不悦, 但是由不等式 (2) 得到 $e^{2-2x} \ge 3-2x$ 好像一点用都没有, 但是注意到:

$$
e^{2-2x} = e^{2(1-x)} \ge (2-x)^2
$$

可以消去分母, 但这并没有解决任何问题, 因为 $x-3<0$, 一开始准备这样放缩就是错误的!
但并不是就没办法了, 这就是导数变形常常让人意想不到的地方, 既然提取 e^x 不行, 那就提取 e^{2-x}, 这次得到

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= (x-1)^2 e^{2-x} (\frac{x+1}{x^2} e^{2(x-1)} + \frac{x-3}{(2-x)^2} \\
&\ge (x-1)^2 e^{2-x} (x+1 + \frac{x-3}{(2-x)^2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F'(x) \ge 0 \\
&\quad \Leftarrow (x-2)^2(x+1) + x - 3 \ge 0 \\
&\quad \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 + x - 3 + 2(x-2)^2 \ge 0 \\
&\quad \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)^2 + (x-2) - 1 \ge 0 \\
&\quad \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 + (x-2+1)(2(x-2)-1) \ge 0 \\
&\quad \Leftrightarrow (x-1)[(x-2)^2 + 2(x-2) - 1] \ge 0 \\
&\because (x-2)^2 + 2(x-2) - 1 \le 4 - 4 - 1 \le 0 \\
&\therefore (x-1)[(x-2)^2 + 2(x-2) - 1] \ge 0
\end{aligned}
$$

以上是通分后进行因式分解的过程, 注意到 $x=1$ 是一个根 (等号条件), 提取因式 $(x-1)$, 并且利用整体进行十字相乘化简较为简单. 上面详细过程供读者参考.

3 双变量问题

3.1 双变量问题

实际上极值点偏移问题也是双变量问题, 由于其经典性并且许多模拟题都围绕极值点偏移所展开, 因此在第一部分大致介绍了极值点偏移. 并让读者从这个有着比较固定模式的题型中摸索到一点感觉. 双变量问题就是围绕两个变量而展开的问题, 广义上还可以认为是多个而不仅仅是两个, 这类题型其实很经常出现, 有一些套路, 但也总会一些创新. 双变量问题主要分为两类:

1. 独立双变量;
2. 不独立双变量.

独立双变量就是变量之间并不会相互影响, 而导数题最多也就是最值讨论, 而对于这种题往往就是分别求最值. 而不独立双变量恰好相反, 两个变量是有联系的, 但这也就是提供了一个方法去做最喜欢在双变量中做的事—消元. **消元**其实就是双变量最根本的思想, 消元以构造新的函数进行单调性讨论.

例题 1 已知函数 $f(x) = (x^2 - ax - a)e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a \in (0, 2)$, 对于任意 $x_1, x_2 \in [-4, 0]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < 4e^{-2} + me^a$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

分析: 本题的障眼法是绝对值, 但是一般是可以直接去掉的. 所以本题应该是一题独立变量的问题, 或者其实就是研究最值的问题.

解:

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - (a-2)x - 2a)e^x \\ &= (x-a)(x+2)e^x \end{aligned}$$

将 a 和 -2 进行比较讨论即可.

(2)

问题等价于先求 $f(x)_{max} - f(x)_{min}$.

注意到 $f(x)$ 在 $(-4, -2) \uparrow, (-2, 0) \downarrow$. 所以 $f(x)_{max} = f(-2) = \frac{4+a}{e^2}$, $f(x)_{min} = min\{f(-4), f(0)\}$. 由于

$$f(-4) = \frac{16 + 3a}{e^4} > 0$$

而

$$f(0) = -a < 0$$

所以最小值为 $-a$, 所以问题等价于:

$$me^a - \frac{a}{e^2} - a > 0$$

因此

$$m > \frac{1+e^2}{e^2}\frac{a}{e^a}$$
$$\Rightarrow m > \frac{1+e^2}{e^2}\frac{1}{e} = \frac{e^2+1}{e^3}$$

例题 2 证明：对任意的 $x_1, x_2 \in (0, e^2]$, $x_1 \ln x_1 - \frac{m}{2}x_1^2 - x_1 + e > e^{x_2}(1 - \frac{x_2}{2}), m \in (0, \frac{1}{e^2})$.

分析: 本题亦是独立变量的问题, 但是多了一个参数 m. 在此我们暂且不细讲参数, 这边参数给了取值范围. 显然只需要证明不等式左边最小值大于不等式右边, 而不等式右边其实可以先求出最大值. 注意到参数的 "影响" 其实很小, 只在 x^2 的系数出现, 这其实意味着参数的不重要性, 当 x 不变时, 就是取 m 的最大值便可取到此时左式的最小值.

证明. 因为
$$[e^x(1-\frac{x}{2})]' = \frac{1}{2}e^x(1-x)$$
所以
$$e^{x_2}(1-\frac{x_2}{2}) \le e(1-\frac{1}{2}) = \frac{e}{2}$$
现在继续利用我们在分析时用的思路, 令
$$f(x) = x\ln x - \frac{m}{2}x_1^2 + \frac{e}{2}$$
即要证 $f(x) \ge 0$, 由 $m < \frac{1}{e^2}$ 得:
$$f(x) \ge x\ln x - \frac{x^2}{2e^2} - x + \frac{e}{2}$$
令 $h(x) = x\ln x - \frac{x^2}{2e^2} - x + \frac{e}{2}$, 请注意: 现在等价证明的是 $h(x) \ge 0$ 而不是 $h(x) > 0$, 这是因为 $m < \frac{1}{e^2}$ 并没有取到等号. 这个逻辑是很重要的.
$$h'(x) = \ln x - \frac{1}{e^2}x = x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e^2}\right)$$
注意到 $\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e) \uparrow, (e, e^2) \downarrow$. 而且 $\frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2} > \frac{1}{e^2}$, 所以 $h(x)$ 先减后增, 关键在于满足 $h'(x_0) = 0$ 的极值点 x_0 没有代数解. 这里需要用到**隐零点**来进行估计.
$$h(x_0) = \frac{1}{e^2}x_0^2 - \frac{1}{2e^2}x_0^2 - x_0 + \frac{e}{2} = \frac{1}{2e^2}x_0^2 - x_0 + \frac{e}{2}$$
这是一个二次函数, 当 $x_0 = e^2$ 取到最小值 $\frac{e^2}{2} - e^2 + \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - \frac{e^2}{2} < 0$, 出现错误, 原因在于隐零点估计范围偏大. 注意到 $h'(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, 因此 $x_0 < e$. 所以
$$h(x_0) > \frac{1}{2} - e + \frac{e}{2} < 0$$
依然不对. 这正是这题最迷惑人的地方, 是因为前面哪里出错了吗? 注意我们的证明步骤都是是等价证明, 不存在放缩过度问题, 问题只在合适隐零点的范围我们很难确定下来. 实际上可以把 x_0 范围缩到 $\frac{e}{2}$, 则此时
$$h(x_0) > \frac{1}{2e^2} \times \frac{e^2}{4} - \frac{e}{2} + \frac{e}{2} > 0$$
. □

下给出另一种方法, 也是本题正解.

证明. 先不把 m 换去,

$$f'(x) = \ln x - mx$$

得到隐零点 x_0 满足:

$$\ln x_0 = mx_0$$

代入 $f(x_0)$ 消去 mx (这里和前面想法不同, 消去参数而不是 $\ln x$)

$$f(x_0) = \frac{x_0}{2}\ln x_0 - x_0 + \frac{e}{2}$$

令 $t(x) = \frac{x}{2}\ln x - x + \frac{e}{2}$, 则由

$$t'(x) = \frac{\ln x - 1}{2}$$

得到

$$t(x) \geq t(e) = \frac{e}{2} - e + \frac{e}{2} = 0$$

□

但是请注意, 上面证明出来即使非常完美, 直接和零接上了, 但是取到了等号, 且此时 $x_0 = e < e^2$ 满足题目所给条件的. 所以问题在哪? 这时候需要知道 $\ln x = mx$, 即 m 和 x_0 有关系. 但是刚才我们明明发现隐零点代数解不存在, 现在又解了一个出来, 不就矛盾了? 其实没有, 我们将 m 解出得到 $m = \frac{1}{e} > \frac{1}{e^2}$, 所以这个隐零点的值其实是不可取的. 那么问题就大了, 那为什么还证出来了? 问题在于将 m 删去时没有限制 x_0, 而恰好新的函数最小值是零, 因此没有造成问题.

注: 这类题还是用消去无用参数, 两边求最值方法最好. 因为这样几乎不可能做不出来, 而本题却是别人特别设计的, 当然这对逆向思维也很有帮助就是了. 另外本题完全可以加强, 将 m 的范围改为 $(0, \frac{2}{e^2})$.

$\boxed{\text{例题 3}}$[2019.5 泉州质检] 已知函数 $f(x) = e^x - x, g(x) = (x+k)\ln(x+k) - x$;

(1) 若 $k = 1, f'(t) = g'(t)$, 求实数 t 的值;

(2) 若 $a, b > 0, f(a) + g(b) \geq f(0) + g(0) + ab$, 求正实数 k 的取值范围.

分析: a, b 并无限定关系, 但形式看起来让很多人觉得害怕, 其实和上一题有相同的思想, 将 m 先处理掉, 无非这边的 m 成为了 a, b 其中一个. 先固定一个, 对另一个变量的函数求导, 通过单调性进行消元.

解:

(1)

$$f'(x) = e^x - 1 \geq x$$

当 $k = 1$ 时, $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$, 因此

$$g'(x) = \ln(x+1) \leq x$$

得到

$$t = 0$$

(2)
首先我们要知道将其中一个变量视为不变进行求导. 利用极值点进行代换, 因此我们先选择 a 作为变量, b 的话下一步消元效果并不是很好, 读者可自行尝试.
原不等式 $\Leftrightarrow e^a - a + (b+k)\ln(b+k) - b - k\ln k - ab - 1 \geq 0$, 令 $h(a) = e^a - a + (b+k)\ln(b+k) - b - k\ln k - ab - 1$, 则

$$h'(a) = e^a - 1 - b$$

所以

$$h(a) \geq h(\ln(1+b)) = (b+k)\ln(b+k) - (1+b)\ln(1+b) - k\ln k$$

令 $m(b) = h(\ln(1+b))$,
注意到 $m(0) = 0$, 这里将用经典的参数范围处理方法:

$$m'(b) = \ln(\frac{b+k}{b+1})$$

显然答案就是使 $m'(b) \geq 0$ 恒成立的 k 的取值范围.
(i) 当 $k \geq 1$ 时, $m'(b) \geq \ln(\frac{b+1}{b+1}) = 0$, 所以 $m(b) > m(0) = 0$;
(ii) 当 $0 < k < 1$ 时, $m'(b) < \ln(\frac{b+1}{b+1}) = 0$, 所以 $m(b) < 0$. 不合题意.
综上所述, $k \in [1, +\infty)$

注: 这里出现了参数分类讨论, 但实际上是比较简单且易于理解的, 和一般的不同. 一般都还需要在估计一个隐零点的范围.

$\boxed{\text{例题 4}}$[2018 安庆市二模] 已知函数 $f(x) = x^2 + x - \ln x$;
(2) 设 $F(x) = f(x) - x^2 + mx \quad (m \in R)$, $x_1, x_2 \quad (0 < x_1 < x_2)$ 分别是函数 $F(x)$ 的两个零点, 求证: $F'(\sqrt{x_1x_2}) < 0$.

分析: 这里要的是导数值小于零, 其实跟极值点偏移也有点关系, 因为导数为零的就是极值点, 这里就是在说 x_1, x_2 与极值点的关系. 当然不能这样作答, 零点在这边也是用处不大的, 大部分零点都是没什么用, 因为代数解基本解不出来. 所以这里需要作差构造和结论靠近的式子进行处理.

证明. 先看看目标式子是如何

$$F'(x) = m + 1 - \frac{1}{x}$$

于是

$$F'(\sqrt{x_1x_2}) = m + 1 - \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_2) - f(x_2) \\ &= (m+1)(x_2 - x_1) - \ln\frac{x_2}{x_1} \\ 0 &= m + 1 - \frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

所以等价于证明

$$\ln\frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

这将双变量转化成 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 为方便进一步证明, 令 $t = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > 1$, 则不等式等价于

$$\ln t - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t}) < 0 \tag{3}$$

接下来的证明很容易, 不再细述. □

注: 要证小于零却重新引入一个等于零的式子, 我们不妨称这种方法为**零的代换**. 其好处在于加减的随意性. 不等式 (3) 其实很常见很重要, 还有在前面与其等价的双元不等式, 将在后文再度出现. 用 $t = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ 这一种代换 (将 $\frac{x_2}{x_1}$ 视为新变量) 在有些极值点偏移的题目也可以用, 例如第二部分的例题 1, 读者可以尝试.

$\boxed{\text{例题 5}}$[2018 全国卷 I] $f(x) = \frac{1}{x} - x + a\ln x \quad (a > 2)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 且 $0 < x_1 < x_2$, 求证:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2.$$

分析: 从条件上看, 可以知道 $f(x)$ 导数可以通分后分母是一个二次函数. x_1, x_2 当然不是独立变量 (是二次方程两根), 所证的形式左边其实是一条直线的斜率. 当然还是不能这么说, 想说的还是放在心里. 尝试解一下.

解:

对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{-1}{x^2}(x^2 - ax + 1)$$

因此, 由**韦达定理**得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

接着对目标式子进一步处理

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{\frac{1}{x_1} - x_1 + a\ln x_1 - \frac{1}{x_2} + x_2 - a\ln x_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1) + a\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} \\ &= a\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} - 2 \end{aligned}$$

所以等价于证明

$$\ln\frac{x_1}{x_2} > x_1 - x_2$$

利用 $x_1 \cdot x_2 = 1$ 消去 x_1 得

$$\ln x_2 - \frac{1}{2}(x_2 - \frac{1}{x_2}) < 0$$

和不等式 (3) 完全相同. 实际上将 1 用 $\sqrt{x_1 x_2}$ 代换可以得到

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} > \sqrt{x_1 x_2}$$

与前一道题的不等式也是一样的.

注: 在此我们称将 1 用其他代数式表示的方法叫做 **1 的代换**, 其好处在于可以随便乘除 (请对比零的代换).

$\boxed{\text{例题 6}}$已知函数 $f(x)=\frac{(x-a)^2}{\ln x}$ (其中 a 为常数). 当 $0<a<1$ 时, 设函数 $f(x)$ 的 3 个极值点为 x_1,x_2,x_3, 且 $x_1<x_2<x_3$, 证明:

$$x_1+x_3>\frac{2}{\sqrt{e}}.$$

分析: 本题奇怪之处在于三个变量, 但是由所需证明却和极值点偏移相似, 可以猜想应该也是用和极值点偏移类似的方法.

证明. 对 $f(x)$ 求导

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2(x-a)\ln x-\frac{1}{x}(x-a)^2}{\ln^2 x}\\&=\frac{x-a}{\ln^2 x}\left(2\ln x-\frac{x-a}{x}\right)\\&=\frac{x-a}{\ln^2 x}\left(2\ln x-1+\frac{a}{x}\right)\end{aligned}$$

所以 $x=a$ 是一个极值点. 显然 1 是函数间断点, 需要在右边的因式中再找到两个根. 这时候其实可以稍微猜一下了, x_2 应该就是等于 a, x_1,x_3 就是 $2\ln x-1+\frac{a}{x}$ 两个零点, 这样就和极值点偏移没啥两样了.

于是我们令 $h(x)=2\ln x-1+\frac{a}{x}$, 则

$$h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{1}{x^2}(2x-a)$$

所以 $h(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 取到最小值, 为了说明 $x_3>a$, 计算 $h(a)=2\ln a<0$ 且 $h(e)>0$, 故 x_3 存在且 $x_3>a$. 剩下就是要证明 $x_1<a$, 这样利用 x_1,x_3 的关系就可以用常规的极值点偏移来做了.

因为 $h(a)<0$, 当 $x\to 0^+$ 时, $h(x)>0$, 其实很显然 x_1 存在并且小于 a. 但是在高中数学中是不懂极限的, 因此我们必须找到另一个 $x_0<a$ 使得 $h(x_0)>0$, 进而由**零点存在定理**才可以说明 x_1 的存在. 这其实并不是一个很容易的问题, 后文还将专门提一下这个问题, 我喜欢称之为 "找零点的问题". 这里先不讲怎么取, 我们可以取 $0<x_0=\frac{a\sqrt{a}}{e^m}<a\quad(m>0)$, 则

$$\begin{aligned}h(x_0)&=3\ln a-2m-1+\frac{e^m}{\sqrt{a}}\\&>3(1-\frac{1}{a})-2m-1+\frac{e^m}{\sqrt{a}}\\&=2(1-m)+\frac{e^m}{\sqrt{a}}-3\frac{1}{a}\end{aligned}$$

因此取 $\frac{m}{2}>max\{\ln\frac{3}{\sqrt{a}},3\}$, 则可以证明, $e^{\frac{m}{2}}>m^2$, 因此

$$\begin{aligned}h(x_0)&>2-2m+e^{\frac{m}{2}}+\frac{e^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{a}}-\frac{3}{a}\\&>2-2m+m^2+\frac{3}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}-\frac{3}{a}\\&=2-2m+m^2>0\end{aligned}$$

所以 x_1, x_3 存在性得证. 依题意可知 a 对答案无贡献, 得到

$$x(2\ln x - 1) = -a$$

令 $t(x) = 2x\ln x - x$,

$$t'(x) = 2\ln x + 1$$

即: 极值点为 $\frac{1}{\sqrt{e}}$, 正好符合题目给的命题, 验证了这样做的正确性. 接下来的步骤不需要再说明. □

$\boxed{\text{例题 7}}$[2019 武汉调研] 函数 $f(x) = (ax - x^2)e^x \quad (a \geq 0)$, 设 $f(x)$ 的两个极值点为 x_1, x_2, 证明: 当 $a > 2\sqrt{\frac{11}{25}}$ 时, $f(x_1) + f(x_2) > 0$. (注: $\ln 11 \approx 2.398$)

分析: 这题前半部分看了都觉得很熟悉, 但是一个 a 的范围就让人觉得有点无语, 当然要证的东西一下子也看不出原型. 特别还给了 $\ln 11$, 这种给数据的要注意, 几乎不可能不用上, 也暗示题目会有一定难度[2].

证明. 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = (a - 2x + ax - x^2)e^x = (-x^2 + (a-2)x + a)e^x$$

因此, 由**韦达定理**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 2 \\ x_1x_2 = -a \end{cases}$$

再观察目标式子

$$f(x_1) + f(x_2) = (ax_1 - x_1^2)e^{x_1} + (ax_2 - x_2^2)e^{x_2}$$

先利用极值点性质即 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ 先降幂

$$(2x_1 - a)e^{x_1} + (2x_2 - a)e^{x_2}$$

这样子还是很难处理, 一个是不能因式分解, 另一个是双变量仅根据条件根本没法消元. 如果注意到题目这个奇葩条件 $a = 2\sqrt{\frac{11}{25}}$, 应该是要将 a 平方, 而出现平方的地方, 是 $\Delta = a^2 - 4a + 4 + 4a > 4(\frac{11}{25} + 1) = \frac{144}{25}$. 比较熟悉二次方程应该还要想到: $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.
于是先在保留形式合适的情况下消去 a (正常给 a 的范围应该消去其他未知量, 但是这里很难做到[3].). 可以利用 $-a = -x_1 - x_2 - 2$ 得

$$f(x_1) + f(x_2) = (x_1 - x_2 - 2)e^{x_1} + (x_2 - x_1 - 2)e^{x_2}$$

进行局部因式分解

$$(x_2 - x_1)(e^{x_2} - e^{x_1}) - 2(e^{x_1} + e^{x_2})$$

要证明其大于 0, 现在问题在于并没有化成单变量, 但实际上我们知道单变量应该是 $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} > \frac{12}{5}$. 注意到大于零的证明和因式分解结合是最让人愉快的, 非零边可以同时乘除代数式.

[2]不然题目没必要给出一个这么精确的值, 当然另一方面也告诉我们可以利用这点去探索适合本题的方法.

[3]这里又是一个逆向的思维.

注意在这里同除以 e^{x_1} 时, 除法在指数中就变成减法, 也正是本题目的所在.
原不等式等价于

$$(x_2 - x_1)(e^{x_2-x_1} - 1) - 2(1 + e^{x_2-x_1}) > 0$$

令 $t = x_2 - x_1 > \frac{12}{5}$, $\quad h(t) = t(e^t - 1) - 2(e^t + 1)$, 则等价于证明

$$h(t) > 0$$

恒成立.

$$h'(t) = e^t - 1 + te^t - 2e^t = e^t(t-1) - 1 > 0$$

所以只需要 $h(\frac{12}{5}) \geq 0$ 即可, 因为

$$\begin{aligned} & h(t) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^t(t-2) - (t+2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^t \geq \frac{t+2}{t-2} \\ \Leftrightarrow\ & t \geq \ln\frac{t+2}{t-2} \end{aligned}$$

将 $t = \frac{12}{6}$ 代入即得

$$\frac{12}{5} \geq \ln 11$$

而由题目所给信息知此显然, 得证. □

$\boxed{\text{例题 8}}$函数 $f(x) = e^{2x} + (a - ax)e^x$, x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点, 且 $0 < x_1 < x_2$; 若 $x_1x_2 + m(x_1 + x_2) < 0$ 恒成立, 求: 实数 m 的取值范围.

分析: 看到 x_1x_2 和 $x_1 + x_2$, 应该要想到像例题 4 那样的转化, 但是这边问题在于不**齐次**. 其实应该还要想到均值不等式, 现在先不往这方面思考.

解:

对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = e^x(2e^x - ax)$$

显然 $a \neq 0$, $f'(x) = \frac{e^{2x}}{a}(\frac{2}{a} - \frac{x}{e^x})$. 所以应该要看出来题目最核心的函数就是

$$\frac{x}{e^x}$$

参数根本不重要, x_1, x_2 是满足

$$\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$$

的点, 其实就是函数值相同, 跟前文的零点的用处其实差不多. 所以现在就得到了 x_1, x_2 的关系, 下一步在于如何用于目标式子了.

主要思路还是将其转化为齐次式, 两边同取对数, 得:

$$\begin{aligned} & \ln x_1 - x_1 = \ln x_2 - x_2 \\ \Leftrightarrow\ & 1 = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

接下来可能挺明显的了, 1 的代换, 得不等式

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + m\frac{x_2^2 - x_1^2}{\ln\frac{x_2}{x_1}} < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + m\frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2}}{\ln\frac{x_2}{x_1}} < 0$$

$$令 t = \frac{x_2}{x_1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \ln t + m(t - \frac{1}{t}) < 0$$

这其实是一个参数问题, 但实际上由不等式 (3) 可知, m 的临界值为 $-\frac{1}{2}$. 因为 $t - \frac{1}{t} > 0$, 于是 $m \leq -\frac{1}{2}$. 或者可以用分参试试, 但是应该要用**洛必达法则**, 读者自行尝试.

由此题启发我出了一道题.

例题 9* 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 有两个不等根 $x_1, x_2 \quad (0 < x_1 < x_2)$, 不等式 $(x_1 - x_2)^2 + m(x_2 + x_1) > 0$ 恒成立, 求参数 m 的取值范围.

解:

前面的步骤不再啰嗦, 还是根据

$$\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$$

进行处理, 很显然, 仍然可以继续使用上面的方法, 不再细述. 这里讲另一种想法. 利用**合分比性质**

$$\frac{x_1 + x_2}{e^{x_1} + e^{x_2}} = \frac{x_2 - x_1}{e^{x_2} - e^{x_1}}$$

代入消去 $x_1 + x_2$ 得

$$(x_2 - x_1)\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{x_2} + e^{x_1}} + m > 0$$

令 $t = x_2 - x_1 > 0$, 则不等式等价于

$$t\frac{e^t - 1}{e^t + 1} + m > 0$$

其实用如果是用上一题的方法化出来的式子和这个是实质性等同的, 读者可以检验. 但是下一步的求导可能会很头疼, 但实际上有不等式

$$t > 2\frac{e^t - 1}{e^t + 1} \tag{4}$$

故

$$t\frac{e^t - 1}{e^t + 1} > 2\left(\frac{e^t - 1}{e^t + 1}\right)^2 > 0$$

所以 $m \geq 0$

注意: 此处两次放缩等号条件相同 $(t = 0)$ 但不能取等, 故 $m = 0$ 是可能的. 不等式 (4) 和 (3) 一样都是很重要的 (我觉得他们就是一对), 这里没有直接证明, 读者可以自行尝试, 后文还会谈到. 敏感的话会发现可以用上面合分比的处理方法解决第二部分例题 1, 不过需要用到洛必达法则. 在这里可能不是很恰当地引出利用**合分比**的方法, 有些题可以用此性质解决, 并且每次用的时候都十分完美. 常见的情况还有 $\frac{\ln x}{x}$, 但是这类题目花样不多, 曾经认为好的题目也记不清了, 便简简单单地提一下.

$\boxed{\text{例题 10}}$已知函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) \geq 0$ 且不恒为 0; 求证:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

对任意属于定义域的 x_1, x_2 恒成立.

分析: 同样可以先固定一个变量, 再构造新函数证明.

证明. 不妨设 $x_1 < x_2$, 等价于证明

$$f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq 0$$

将 x_1 固定构造新函数

$$F(x) = f(x_1)+f(x)-2f\left(\frac{x_1+x}{2}\right) (x \geq x_1)$$

对 $F(x)$ 求导

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - f'\left(\frac{x_1+x}{2}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

因为 $\frac{x_1+x}{2} \leq x$ 且 $f'(x)$ 单调增.

因此 $F(x)$ 单调增, 即

$$F(x) \geq F(x_1) = 0$$

□

注: 这是一题以函数凹凸性为背景的题目, 这是我直接用结论作为题目, 正常出题会告诉具体函数. 就我的经验, 从来都只会考这样的证明, 利用高中知识也就是这样去证明. 如果有兴趣可以再了解一下**琴声不等式**, 但是从来没见考过就是了 (连三元的都没有).

3.2 小结

在导数题目中, 双变量问题还是很多的, 花样也千奇百怪. 有些东西可能需要多想一想. 主要思想基本没有变过, 就是**消元**. 与第二部分不同, 在本节出现了较多技巧, 逐渐涉及一些不等式, 慢慢发现有一些常见结构. 一道比较好的导数题就是很综合的, 所以其实很难去分类. 但是有些东西发现一直会在使用, 比如例题 5, 7 都用到韦达定理. 实际上这种还是很常见的, 因为指数函数和多项式相乘的的导数仍然是指数函数乘多项式; 或者对数函数和多项式相加, 求导后通分分子也可以是多项式. 又如 $\frac{x}{e^x}, \frac{\ln x}{x}$ 这种函数都可以叫 "母函数"[4]了, 许多题都由其导出.

4 恒成立求参数取值范围

正常来说, 参数问题不需太过紧张. 导数经常看不透, 很重要一个原因就是几乎什么都解不出来, 或者说隐零点几乎在所难免. 但是参数范围必须是一个非常确定的范围, 所以一定是特殊

[4]确实有母函数这个概念, 这里只是一个比喻.

的. 最常见的就是定义域的边界是 0, 就是 “不等号取到” 的时候. 这种情况就是求导单调 (或者边界又是临界值 0, 就再继续求导), 然后反过来证明不属于这个范围的参数的范围不符合题意. 但是许多人都是不喜欢这样的, 他们喜欢直接把范围求出来 (反正我一直觉得旁边的人很多都这样, 不管三七二十一先分离参数), 但是这是不规范的. 正如上文所述, 如果参数在边界取到临界值, 那么一般需要用到洛必达法则, 并且直接分离参数会出现复杂的分式, 求导麻烦, 甚至需要求好几次导. 所以大部分情况, 参数临界值都在边界, 或者是特殊点 0, 1, 因为 $e^0 = 1, \ln 1 = 0$, 这种特殊的点是绝对不能放过的. 其实一般看到函数, 不是就开始求导, 而是先观察是不是有特殊点取到特殊的函数值 (比如说 0). 导数的参数问题有个很重要的特征, 经常是可以先知道范围再证明.

还有一个需要说的是关于严谨性带来的便利, 仔细一想, 要想得到参数正确的范围肯定是有个点取到了这个值 (包括极限). 有时候所证不等式没有等号, 很可能是定义域的问题导致 “那个点” 被忽略或者题目想让人挖去临界点. 不知道读者有没有想到, 其实还有一种花样, 就是转化为离散的问题, 求的参数是整数. 那么一般就是真的是取不到了, 但是这类问题并不难. 有印象的话可以知道一般都是在选择题中, 可以利用半分参利用几何意义. 比较严谨的话, 是完全分参, 最后利用隐零点的范围去估计最值.

参数问题能搞的花样不多, 所以在这种情况一般函数会比较难求导, 或者第一题比较麻烦. 但是请注意, 一般第一题越麻烦, 第二题就越不慌, 因为提示往往就在第一题.

$\boxed{\text{例题 1}}$ 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$.
若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 求 a 的取值范围.

分析: 这是一题常规题, 很显然 1 就是临界点, 求导单调其实就是答案, 作为引入, 利用常规方法和分参做个比较.

解法一:

对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a$$

令 $f'(1) = 0$ 知 $a = 2$ 就是临界值, 根据 $f(x)$ 的形式, 很容易知道 $a \in (-\infty, 2]$. 知道这些之后就形式上认真写好证明:

(i) 当 $a \le 2$ 时,

$$f'(x) \ge 0$$

恒成立, 故 $f(x) > f(1) = 0$;

(ii) 当 $a > 2$ 时,

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$$

所以 $f'(x)$ 单调递增, 注意到

$$\begin{cases} f'(1) = 2 - a < 0 \\ f'(e^a) = 1 + \frac{1}{e^a} > 0 \end{cases}$$

故 $\exists x_0 \in (1, e^a)$ 使得 $f'(x_0) = 0$, 于是

$$f(x_0) < f(1) = 0$$

舍去.
解法二:
不等式等价于

$$a < \frac{x+1}{x-1}\ln x$$

令 $g(x) = \frac{x+1}{x-1}\ln x$, 对 $g(x)$ 求导

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(\ln x + \frac{1}{x} + 1)(x-1) - (x+1)\ln x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x - \frac{1}{x} - 2\ln x}{x^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

一般需要对分子单独求导, 这里不确切说明了, 这个不等式在前文已经出现过. 接下来很显然需要用到洛必达法则, 高中对极限了解有限, 洛必达使用起来其实也非常别扭:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\ln x}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + \frac{1}{x} + 1}{1} \\ &= 0 + 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

我一般不喜欢直接分参, 几乎都要用洛必达; 并且一般分参好做的, 直接讨论会更轻松.

例题 2 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + \frac{2}{x} - 3$.
若当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求参数 a 的取值范围.

分析: 临界点函数无意义, 说明还是和常规题不太相同. 但是一看到 ln, 下意识应该要觉得 $f(1) = 0$ 是临界点. 此时 $a = 1$
解:
$a \geq 1$, 下证明其充要性:

证明. 必要性: 由

$$f(1) = a - 1 \geq 0$$

得 $a \geq 1$.
充分性: 当 $a \geq 1$ 时, 令 $g(x) = \ln x + x + \frac{2}{x} - 3$, 对 $g(x)$ 求导

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2}(x^2 + x - 2) \\ &= \frac{1}{x^2}(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$.
注意到 $f(x) \geq g(x) \geq 0$, 充分性得证. □

注: 这边也再次看到参数在一些证明中的不必要性, 所以请注意参数的处理方法, 可以得到简洁且完全无误的证明. 将参数直接放成常数其实很常用, 前面其实也出现过这样处理的题目了, 第三部分的例题 2.

$\boxed{\text{例题 3}}$[2015 全国卷 II] 已知函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$ 对任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 1], |f(x_1) - f(x_2)| \le e - 1$, 求 m 的取值范围.

分析: 这题的样子和第三部分例题 1 很像, 都有绝对值, 但是本题比那题多点值得思考的东西.

解:

对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = m(e^{mx} - 1) + 2x \tag{5}$$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

因此

$$f(x)_{min} = f(0) = 1$$

不等式等价于

$$f(x)_{max} \le e$$

因为 $f(x)_{max} = max\{f(1), f(-1)\}$, 那也即需要满足

$$\begin{cases} f(1) = e^m - m + 1 \le e \\ f(-1) = e^{-m} + m + 1 \le e \end{cases}$$

令 $h(m) = e^m - m + 1$, 即需要满足

$$h(m) \le e \text{且} h(-m) \le e$$

注意到特殊点 $h(1) = e$, 对 $h(m)$ 求导

$$h'(m) = e^m - 1$$

所以 $h(m)$ 在 0 取极值, 因此可以知道存在 $m_0 < 0$ 使得 $h(m_0) = e$, 这个用零点存在定理即可说明其存在性. 可以得到 $m_0 \le m \le 1$, 但是参数范围是不能有隐零点这种模糊的数据的. 注意到我们需要满足两个条件, 还需要 $h(-m) \le m$. 所以还需要满足

$$m_0 \le -m \le 1$$

也即 $-1 \le m \le -m_0$, 所以答案是 $[m_0, 1]$ 和 $[-1, -m_0]$ 的交集.

那么想一想也知道答案就是 $[-1, 1]$, 也就是 $m_0 < -1$, 直观上理解就是 $|m_0| > 1$.

$$\begin{gathered} m_0 < -1 \\ \Leftrightarrow h(m_0) > h(-1) \\ \Leftrightarrow h(-1) < e \\ \text{而} 2 + \frac{1}{e} < \frac{5}{2} < e \end{gathered}$$

故 $m \in [-1, 1]$.

注: 这题的确是一道好题. 注意式子 (5), $m(e^{mx} - 1)$ 正负性和 $2x$ 相同, 因而得到单调性. 在不少题目, 特别是出现 ln 的题目, 经常不能 "因式分解", 最后可以看成两个式子相加, 但正负性

相同. 这种题也具有一定迷惑性. 看到后面这个参数求法其实非常少见, 但是只要认真分析就能知道想干什么, 其实后面就是一个极值点偏移的背景了.

例题 4 已知 $k \in N^*$, 当 $x > 2$ 时, 不等式 $x(\ln x + 1) > k(x - 2)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

分析: 这是一题典型的参数为整数的题目, 这种其实也可以逐个代入进行证明, 但是略显不规范也意义不大. 在此介绍三种方法.

解法一 (参数分离):

不等式等价于

$$k < \frac{x(\ln x + 1)}{x - 2}$$

令 $f(x) = \frac{x(\ln x+1)}{x-2}$, 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = \frac{x - 2\ln x - 4}{(x - 2)^2}$$

令 $h(x) = x - 2\ln x - 4$, 则因为

$$h'(x) = 1 - \frac{2}{x} > 0$$

所以 $h(x)$ 单调递增, 所以现在应该要估计隐零点范围.

正常来说, 先不要估计范围, 先看最后极值和隐零点的关系再来估计范围. 一般来说, 极值和隐零点都是线性关系, 最后很容易估计.

利用隐零点, 消去 $\ln x$

$$f(x_0) = \frac{x_0(\frac{x_0-4}{2} + 1)}{x_0 - 2} = \frac{x_0}{2}$$

所以隐零点的估计只需夹在两个隔二的整数之间 (如 4 和 6). 这里其实还不是很容易看出来.

最后的估计是

$$\begin{cases} h(8) = 4 - 6\ln 2 = 2\ln\frac{e^2}{8} < 0 \\ h(10) = 6 - 2\ln 10 = 2\ln\frac{e^3}{10} > 0 \end{cases}$$

因此, $\frac{x_0}{2} \in (4, 5)$ 即 $k_{max} = 4$.

解法二 (正常地直接求导):

令 $f(x) = x(\ln x + 2) - k(x - 2)$, 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = \ln x + 2 - k$$

(i) 当 $k \le 2$ 时, $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge f(2) > 0$;

(ii) 当 $k \ge 3$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得

$$x_0 = e^{k-2}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x)_{min} &= f(x_0) \\ &= e^{k-2}(k - 1) - k(e^{k-2} - 2) \\ &= 2k - e^{k-2} \end{aligned}$$

因为

$$\left(2k - e^{k-2}\right)' = 2 - e^{k-2} < 0$$

所以关于 k 的函数 $2k-e^{k-2}$ 单调减, 且注意到

$$\begin{cases} 2\times 4-e^2=8-e^2>0 \\ 2\times 5-e^3=10-e^3<0 \end{cases}$$

故 $k_{max}=4$.
解法三 (变形):
不等式等价于

$$\ln x+1-k+\frac{2k}{x}>0$$

令 $g(x)=\ln x+1-k+\frac{2k}{x}$, 对 $g(x)$ 求导

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2k}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x-2k)$$

因为 $k\in N$ 大于等于 1, 故有

$$g(x)_{min}=g(2k)=\ln 2k-k+2$$

再令 $h(x)=\ln 2x-x+2$, 对 $h(x)$ 求导

$$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$$

所以 $h(x)$ 单调减, 且注意到

$$\begin{cases} h(4)=\ln 8-2>0 \\ h(5)=\ln 10-3<0 \end{cases}$$

故 $k_{max}=4$.

注: 前两种方法都比较常规, 求导后认真讨论, 都不难得到正确答案. 第三种方法略有不同, 对原不等式进行变形. 主要是将 $\ln x$ 的系数除去, 已达到求导后是多项式的效果, 注意**多项式**很方便. 解法三由蔡嘉贤提供, 拥有解答形式上的优雅.

$\boxed{\text{例题 5}}$已知函数 $f(x)=\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{x+1}$;
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}\le e$ 对任意的 $n\in N^*$ 都成立，求 α 的最大值.

分析: 函数是比较复杂, 对数带平方, 后面还跟着一个分式. 这样第一问可能就会比较麻烦, 但是不用讨论参数, 认真计算即可. 第二问直接求导这边可能就不太行了, 两边同取对数肯定是必须的.

解:
(1) 对 $f(x)$ 求导

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ln(1+x)\frac{1}{1+x}-\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2\ln(1+x)}{x+1}-\frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{1+x}\left(\ln(1+x)+\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}-(1+x))\right) \end{aligned}$$

令 $t=1+x>0$, 上式化为

$$\ln t-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$$

求导容易得到

$$f'(x)>0\text{当}x\in(-1,0),f'(x)<0\text{当}x\in(0,+\infty)$$

实际上这个不等式在前文已经出现过好几次了.
(2) 两边同取对数, 不等式等价于

$$(n+\alpha)\ln(1+\frac{1}{n})-1\le 0 \tag{6}$$

注意, 一般如果出现正整数 n 的问题, 且出现了 $\frac{1}{n}$. 则一般换元方法是 $x=\frac{1}{n}$, 因为这样 $x\in(0,1]$ [5]比较密集可以减少整数离散性带来的一些问题.
于是令 $x=\frac{1}{n}\in(0,1]$, 不等式可以由下面的不等式推出[6]

$$\ln(1+x)(\frac{1}{x}+\alpha)-1\le 0$$

为了方便求导讨论, 于是再令 $h(x)=\ln(1+x)(1+\alpha x)-x$, 等价于 $h(x)\le 0$. 注意 $h(0)=0$ 说明就是常规参数问题, 所以应该求导取小于等于零恒成立的 α 的部分. 于是对 $h(x)$ 求导

$$h'(x)=\frac{\alpha x+1}{x+1}+\alpha\ln(x+1)-1=\alpha(1+\ln(1+x))+\frac{1-\alpha}{x+1}-1$$

发现 $h'(x)=0$, 但是问题不大, 现在欲使 $h'(x)\le 0$ 恒成立, 于是继续求二阶导

$$h''(x)=\frac{\alpha}{1+x}-\frac{1-\alpha}{(1+x)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}(\alpha(1+x)-(1-\alpha))$$

现在欲使 $h''(x)\le 0$, 当 $\alpha=0$ 时显然成立; 当 $\alpha\ne 0$ 时, $\alpha(1+x)-(1-\alpha)$ 是一次函数, 所以将 $0,1$ 分别代入并小于零即可. 那么得到

$$\alpha\le\frac{1}{3}$$

但是发现没有, 这和常规做法非常不一样. 常规做法是在临界点分析出参数的取值, 进而矛盾容易说明. 但是这里直接限制可以吗? 注意 $\frac{1}{3}$ 是在 $x=1$ 的时候限制出来的. 实际上, 当 $a>0,h''(0)<0$ 但是 $h''(1)>0$ 是可能使条件成立的. 以往的题目可以这么做往往是因为导数单调减, 所以如果不满足左端点小于等于零的话就会推出矛盾. 但是这里是单调增的. 所以很开心分析到这里之后会发现 $\alpha>\frac{1}{3}$ 的矛盾推不出来. 所以现在应该要废弃这个经典的参数讨论方法, 其实也未必, 一个方法试了没几次就放弃不应该是学习的态度. 再想一想, 如果 $h''(0)<0,h''(1)>0$, $h'(x)$ 先减后增, 那还是有希望的吧. 因为 $h'(1)<0$ 是有可能. 即使 $h'(1)>0$ 那么 $h(x)$ 就应该先减后增, 所以只需要满足 $h(1),h(0)$ 均小于零即可. 所以最后分析得到的结论就是, 最大值就是在 $h(1)$ 或者 $h(0)$ 取到. 其实认真想一想, 题目要求的是 α 的最大值, 0 根本就取不到, 所以肯定是 $h(1)=0$ 所得的 α 才是答案. 所以现在可以借助这个必要性的估计对刚才的分析进行严谨的叙述.
显然 $\alpha\le 0$ 满足题意.
因为

$$h(x)\le 0$$

[5]注意此处的说法不是很严谨, 就是想把离散化成连续才可以进一步求导. 严格来说, x 不完全和 $\frac{1}{n}$ 相等.

[6]注意不等价.

所以 $h(1) \le 0$, 进而得到

$$\alpha \le \frac{1}{\ln 2} - 1 = \log_2 \frac{e}{2} < \frac{1}{2}$$

那么 $1 + 0 - (\frac{1}{\alpha} - 1) < 2 - 2 = 0$, 所以 $h''(0) < 0$. 因此 $h'(x)$ 可能单调减或者先减后增, 那么同样的 $h(x)$ 可能单调减或者先减后增, 所以 $h(x)_{max} = max\{h(0), h(1)\}$. 也就是是

$$\alpha \le \frac{1}{\ln 2} - 1$$

注: 这种方法其实非常严谨, 但是会有人觉得比较另类, 因此不觉得这样做是正确的.

所以标准答案肯定不是这样做的, 但是上面的想法的确是对的, 就是想说, 有时候还是该往一个可能的方向继续尝试, 发现的东西可能远大于解决一道题目. 下面再重新想想这个问题, 第一问这么奇葩的函数在第二问没有用会让人觉得出题者很失败. 前面也说过, 第一题越麻烦, 越可能是第二题的提示. 所以使用完全分参看看, 因为由求最大值这一条件知道临界的点必不会在零取到, 不会用到洛必达, 并且分参后复杂形式跟第一问的确有关联.

另解:

原不等式等价于

$$\alpha \le \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} - n$$

令 $h(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ $\quad, x \in (0, 1]$[7], 现在欲求 $h(x)$ 的最小值. 对其求导

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{\ln^2(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+x}\left(\frac{1+x}{x^2} - \frac{1}{\ln^2(1+x)}\right) \end{aligned}$$

注意到 $f(x) \le f(0) = 0$, 故

$$\frac{1+x}{x^2} \le \frac{1}{\ln^2(1+x)}$$

则说明 $h(x) \ge h(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$.

所以 $\alpha \le \frac{1}{\ln 2} - 1$.

注: 若 $h(x) \ge A$, 则 $\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} - n \ge A$. 但两者不是等价关系. 而是因为 $x = 1$ 取到等号, 于是当 $n = 1$ 时, $\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} - n$ 可以取到最小值 A. 还有一点值得强调, 就是一开始就应该把 0 这个特殊点代入 $f(x)$, 而此时 $f(0) = 0$ 是非常特殊的, 结合第一问单调性可以马上得到两个代数式的大小关系.

$\boxed{\text{例题 6}}$[2014 湖南] 已知常数 $a > 0, f(x) = \ln(1 + ax) - \frac{2x}{x+2}$;

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 求 a 的取值范围。

分析: 第一问是让人觉得很烦的参数讨论单调性, 第二问和第三部分的例题 7 有些相像, 其实想法是有差别的, 像本题这样的题目其实比较多, 将变量最终化成 a, 再构造新函数解决问题. 上一部分的那道题是给 a 的范围, 最后却用了别的和 a 有关的变量. 总的来说, 前面那道题是很不好想的, 本题比较规矩.

[7]这里直接构造函数限制定义域, 省去代换上严谨性的说明, 最后再作为原题的充分条件.

解:
(1) 对 $f(x)$ 求导

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{a}{1+ax} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} \\
&= \frac{a}{1+ax} - \frac{4}{(x+2)^2} \\
&= \frac{a(x+2)^2 - 4(ax+1)}{(x+2)^2(1+ax)} \\
&= \frac{ax^2 + 4(a-1)}{(x+2)^2(1+ax)}
\end{aligned}
$$

(i) 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立;
(ii) 当 $a \in (0,1)$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 2\sqrt{\frac{1-a}{a}})\downarrow$, 在 $(2\sqrt{\frac{1-a}{a}}, +\infty)\uparrow$.
(2) 注意到 $\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{1-a}{a}}$, 因此当 $a \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ 时, 就必定会有两个极值点.
要想消去 x_1, x_2, 那就需要用到**韦达定理**:

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 0 \\
x_1 x_2 = \frac{4(a-1)}{a}
\end{cases}
$$

对目标式子进一步化简

$$
\begin{aligned}
f(x_1) + f(x_2) &= \ln(1 + ax_1) - \frac{2x_1}{x_1+2} + \ln(1+ax_2) - \frac{2x_2}{x_2+2} \\
&= \ln\left(1 + a(x_1+x_2) + a^2 x_1 x_2\right) - 4\frac{x_1x_2 + x_1 + x_2}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4} \\
&= \ln(2a-1)^2 - 4\frac{\frac{4(a-1)}{a}}{\frac{4(a-1)}{a} + 4} \\
&= \ln(2a-1)^2 + \frac{2}{2a-1} - 2
\end{aligned}
$$

因为 $a \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, 所以 $2a-1 \in (-1,0) \cup (0,1)$.
(i) 当 $2a-1 < 0$ 时

$$
\ln(2a-1)^2 + \frac{2}{2a-1} - 2 < 0 + 0 - 2 = 0
$$

(ii) 当 $0 < 2a-1 < 1$ 时, 由不等式

$$
\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}
$$

知 $f(x_1) + f(x_2) > 0$. 综上所述, $a \in (\frac{1}{2}, 1)$.

注: 本题最后其实可以不用不等式, 也可以分类讨论求导完成. 这里想说不等式也可以用来估计参数的范围, 比如再看下面一题.

$\boxed{\text{例题 7}}$[2010 全国卷理] 设 $f(x) = 1 - e^{-x}$.
(1) 证明: $x > -1$ 时, $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$;
(2) 设 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$, 求 a 的取值范围.

分析: 第一问就是最基础的不等式. 第二问注意到当 $x = 0$ 时不等号成立, 应该是常规套路, 但是函数可能会比较复杂.
解:

(1) $1-e^{-x}\geq 1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$.
(2) 令 $g(x)=-f(x)+\frac{x}{ax+1}$, 对 $g(x)$ 求导

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-x}+\frac{ax+1-ax}{(ax+1)^2}\\&=\frac{1}{(ax+1)^2}(e^x-(ax+1)^2)\\&=\frac{e^{\frac{x}{2}}+ax+1}{(ax+1)^2}(e^{\frac{x}{2}}-(ax+1))\end{aligned}$$

注意到 $e^{\frac{x}{2}}\geq\frac{x}{2}+1$, 所以只要满足 $a\leq\frac{1}{2}$, $g'(x)\geq 0\Rightarrow g(x)\geq g(0)=0$. 而且反过来也很容易证明 $a>\frac{1}{2}$ 时是不成立的.

注: 不知道读者在看到这里的时候有没有想到我们在讨论极值点偏移时候的最后一题, 那时候用的放缩 $e^{2(x-1)}\geq x^2$ 的思想和这里其实上是等同的.

$\boxed{\text{例题 8}}$[2019 福建省质检] 已知函数 $f(x)=x(e^{2x}-a)$, 若 $f(x)\geq 1+x+\ln x$, 求实数 a 的取值范围.

分析: 一看到问题所求应该不觉得难, 又是参数范围. 但是会发现找不到特殊的那一个点. 我们一边解一边分析, 介绍三种方法.
解法一 (参数分离):
最暴力的方法, 看看效果.
不等式等价于

$$a\leq e^{2x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-1$$

令 $g(x)=e^{2x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-1$, 等价于求 $g(x)$ 的最小值.

$$g'(x)=2e^{2x}+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(2x^2e^{2x}+\ln x)$$

很显然应该是一个隐零点的问题, 但是在这边估计隐零点范围没有用, 因为那样子无法确定参数范围. 所以只有一种可能, 隐零点直接代入可以得到一个常数. 但是这边怎么带怎么化简都没有什么效果. 如果看答案, 会有一种方法就是用分离参数的, 但是可能会搞不懂为什么那样操作. 那在对式子仔细研究一番. $g(x_0)=0\Leftrightarrow 2x_0^2e^{2x_0}+\ln x_0=0$, 这里的玄机可能不会一下就看出来. 其实这里面藏了一个函数. $g(x_0)=0$ 又等价于

$$2x_0e^{2x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}$$

所以这里有个函数 $h(x)=x\ln x$, 对 $h(x)$ 求导

$$h'(x)=\ln x+1$$

所以 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{e},+\infty)\uparrow$. 令 $m(x)=2x^2e^{2x}+\ln x$, 注意到 $m(\frac{1}{e})=\frac{2}{e^2}e^{\frac{2}{e}}-1<\frac{2}{e}-1<1, m(1)>0$, 得 $x_0\in(\frac{1}{e},1)$.

$$\begin{cases}\frac{1}{x_0}>1\\ e^{2x_0}>e^{\frac{2}{e}}>1\end{cases}$$

所以 $\frac{1}{x_0}$ 和 e^{2x_0} 在同一单调区间, 由单调性即得

$$e^{2x_0}=\frac{1}{x_0}\text{或者说}\ln x_0+2x_0=0$$

代入得
$$g(x_0) = \frac{1}{x_0} - \frac{-2x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 1$$
故 $a \leq 1$.
解法二:
正规处理, 令 $F(x) = f(x) - x - \ln x - 1 = xe^{2x} - (a+1)x - \ln x - 1$. 对 $F(x)$ 求导
$$F'(x) = (2x+1)e^{2x} - (a+1) - \frac{1}{x} = (2x+1)e^{2x} - \frac{1+(a+1)x}{x}$$
进一步分析是很难有结果的, 但是参数范围肯定会有临界值. 这个值是可能被猜出来, 在这边取什么值可能得到好的效果? 显然就是 $2x+1 = ax+1$, 因为这个时候可以因式分解. 因式分解是判断正负极好用的工具, 而导数就是在讨论正负.
所以先研究一下 $a = 1$ 的情况, 此时
$$F'(x) = (2x+1)(e^{2x} - \frac{1}{x})$$
所以 $F'(x)$ 存在隐零点 x_0 且满足 $e^{2x_0} = \frac{1}{x_0}$. 和解法一得到的关系一样, 代入 $F(x)$ 即得最小值刚好为 0. 所以由 a 的系数 $-x$ 可知 $a \leq 1$, 这里顺便说一下已知参数范围的不等式证明.
(i) 当 $a \leq 1$ 时, $F(x) \geq xe^{2x} - 2x - \ln x - 1 \geq 0$.
(ii) 当 $a > 1$ 时, 将 $F(x)$ 写成 $xe^{2x} - 2x - \ln x - 1 + (1-a)x$, 则
$$F(x_0) = 0 + (1-a)x_0 < 0$$
不合题意.
故 $a \leq 1$.

注: 其实就是参数临界值一出来就相当于不等式证明, 重在证明而不是参数讨论, $a > 1$ 的矛盾就用原本刚好取到零的那个点就完美解决. 这也是我当时的做法[8].

解法三 (不等式): 不等式等价于
$$e^{2x+\ln x} \geq (a+1)x + \ln x + 1$$
故由不等式
$$e^x \geq x + 1$$
得
$$e^{2x+\ln x} \geq 2x + \ln x + 1$$
等号当且仅当 $2x + \ln x = 0$ 时成立, 容易知道这个点存在.
故 $a \leq 1$, $a > 1$ 的矛盾和上一种解法相同. 将隐零点代入即可.

注: 该方法被认为本题最优解, 实际上慢慢地会发现 $e^x \geq x+1$ 又或是 $\ln x \leq x-1$ 常常出现的时候 “x” 并非只是单纯的 x, 会通过形式上的复杂度增加题目难度.

[8]本部分的例题 2 其实也是这种方法.

5 不等式证明

5.1 隐零点

利用隐零点证明不等式是一种常见且简单的方法, 套路十分固定.

$\boxed{\text{例题 1}}$已知函数 $g(x) = (x+1)\ln x + 1$;

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $f(x) = x\ln x - \frac{1}{e^x}$ 的最小值为 M, 证明: $M \in (-1-\frac{2}{e^2}, -\frac{1}{e})$.

(1) 解:

对 $g(x)$ 求导

$$g'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

再进一步求导

$$g''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x-1)$$

所以 $g'(x) \geq g'(1) = 2 > 0$, 故 $g(x)$ 在定义域内单调增.

(2)

证明. 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{e^x}$$

进一步求导

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x} > 0$$

所以 $f'(x)$ 单调增, 且

$$\begin{cases} f'(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} > 0 \\ f'(\frac{1}{e^2}) = -1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{e^2}}} < 0 \end{cases}$$

所以存在隐零点 $x_0 \in (\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 将此条件代入 $f(x_0)$ 得:

$$f(x_0) = (x_0+1)\ln x_0 + 1$$

由 (1) 得, $f(x_0)$ 关于 x_0 单调增. 故

$$-1 - \frac{2}{e^2} = (1+\frac{1}{e^2}) \times (-2) + 1 < f(x_0) = f(x)_{min} = M < (\frac{1}{e}+1) \times (-1) + 1 = -\frac{1}{e}$$

□

注: 可以看到, 本题有上下两个 “界”, 但是都取不到等号, 很可能就是放缩所得. $f'(x)$ 单调, 很明显就说明了是一个隐零点的问题, 利用隐零点的性质先化简 $f(x_0)$(一般消去 ln 或者 e^x). 而此题消去 e^x 是因为这样刚好和第一题联系上, 否则两道题两个函数毫无关系也略显奇葩. 至于那两个点 $\frac{1}{e}$和$\frac{1}{e^2}$ 一般是先由目标式计算出来再代入 $f'(x)$ 检验. 本题还可以利用 $f(x_0) < f(\frac{1}{e})$ 或者 $f(x_0) < f(\frac{1}{e^2})$ 进行加强.

$\boxed{\text{例题 2}}$[2019 龙岩] 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + (a+1)x + a\ln x \quad (a<0)$, $f(x)$ 的最小值为 M, 证明: $M < \frac{13}{15}$.

分析: 这道题除了多一个参数, 好像没什么不同. 一般有参数利用参数把 x 消掉 (因为 a 给了范围, 最好保留) 就行了.

证明. 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = x + (a+1) + \frac{a}{x} = \frac{1}{x}(x+a)(x+1)$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0 = -a$ 时取最大值, 一般来说要把 x_0 消去, 这里我要消去 a. 因为如果消去 x_0, $f(x_0)$ 中会出现 $\ln(-a)$, 这种很不讨人喜欢. 而且 $x_0 = -a$ 范围是大于零的, 那么当做变量也比较舒服.

于是

$$f(x)_{min} = f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} + (1-x_0)x_0 - x_0 \ln x_0 = -\frac{x_0^2}{2} + x_0 - x_0 \ln x_0$$

令 $g(x) = -\frac{x^2}{2} + x - x\ln x \quad (x > 0)$, 对 $g(x)$ 求导

$$g'(x) = -(x + \ln x) \downarrow$$

所以现在已经把前面的套路都说一遍了, 现在关键是这个隐零点范围应该如何确定. 先把这个隐零点 x_1 代入 $g(x)$ 得

$$g(x_1) = \frac{x_1^2}{2} + x_1$$

按照一般套路, 很明显 $g'(\frac{1}{e}) > 0$, 需要找到那个 $g'(x) < 0$ 的 x, 一般需要解方程

$$g(x_1) = \frac{13}{15}$$

但是只要一试就知道不对劲, 这个解的形式让人看了就想放弃. 但是没关系, 导数中不等的放松往往比较宽松, 我们可以再证一个更强的结论来证明本题, 即找到一个更合适的 A, 使得 $M < A < \frac{13}{15}$.

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{2} + x < \frac{13}{15} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x < \frac{26}{15} \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)^2 < \frac{41}{15} \end{aligned}$$

这样写的好处是尽量对右边放缩方便寻找一个合适的 A, 使得 $\sqrt{A}$ 也是有理数, 则方便计算.

所以接下来的工作要将 $\frac{41}{15}$ 这个数值调小. 首先调整分母, 离 15 比较近的一个合适的完全平方数是 25. 所以先将分母化为 15 和 25 的最小公倍数 75:

$$\frac{205}{75}$$

下一步应将分子处理方便消去分母中“多余”的 3.

$$\frac{205}{75} > \frac{204}{75} = \frac{68}{25}$$

为了方便, 再向下调 (刚才将 $\frac{205}{75}$ 调成 $\frac{204}{75}$ 的幅度很小)

$$\frac{68}{25} > \frac{64}{25}$$

此时解出 $x < \frac{3}{5}$. 所以若能证明 $g'(\frac{3}{5}) < 0$ 就可以解决本题. 于是计算

$$g'(\frac{3}{5}) = -(\frac{3}{5} + \ln\frac{3}{5})$$

利用不等式 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ 得

$$g'(\frac{3}{5}) < -((\frac{3}{5}) + 1 - \frac{5}{3}) = -1 + \frac{16}{15} > 0$$

放缩失败, 但是可以看到很接近了. 所以在上一步的放缩调整放缩的幅度. 利用不等式 $\ln x > \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})(0 < x < 1)$(前文已经出现过):

$$\begin{aligned}
g'(\frac{3}{5}) &> -(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}(\frac{3}{5} - \frac{5}{3})) \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{9}{5} - \frac{5}{3}) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{15} \\
&< 0
\end{aligned}$$

则原题得证.
但其实这不是这道题的本意, 此题自是有创新之处.
注意到: $\frac{13}{15} = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} > \frac{1}{2e} + \frac{1}{\sqrt{e}}$, 所以只需证明

$$g'(\frac{1}{\sqrt{e}}) < 0$$

即可.

□

注: 我觉得本题还有一个地方 $x + \ln x$ 也是在予以提示, 所以尽量在 e 的幂次中寻找这个隐零点的范围.

5.2 中间量

在某些情况, 直接求导显得麻烦不讨好. 这种往往是弱的不等式, 但是由于函数的复杂性造成难以观察并且求导无果. 这种情况一般用一个比较易于处理的中间量直接进行大幅度放缩.

$\boxed{\text{例题 1}}$已知函数 $f(x) = \frac{-x^2-x-1}{e^{x-1}}$;
(1) 求 $f(x)$ 的极值;
(2) 求证: 当 $x > 0$ 时, $xf(x) > 2\ln x - x^2 - 3x$.
(1) 解:
对 $f(x)$ 求导

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2x - 1 + x^2 + x + 1}{e^{x-1}} \\
&= \frac{x^2 - x}{e^{x-1}} \\
&= \frac{x(x-1)}{e^{x-1}}
\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(0)=-e$, 极小值 $f(1)=-3$.
(2)
如果直接令 $g(x)=xf(x)-2\ln x+x^2+3x$, 求导得到

$$g'(x)=\frac{x^3-2x^2-x-1}{e^{x-1}}+\frac{2x^2+3x-2}{x}$$

然后就把式子搞得极其复杂, 最惨的是不知道下一步怎么做.
第一问已经是一个让人看了很不爽的函数了, 好不容易求了导看起来还可以. 所以先把 $f(x)$ 单独出来观察一番, 不等式等价于

$$f(x)>\frac{2\ln x}{x}-x-3$$

左边先减后增, 在 1 取极小值; 右边的 $\frac{2\ln x}{x}$ 先增后减, 而 $-x$ 显然单调减. 也就是左右两边就是要往着相反的方向发展, 所以不妨直接放大一点, 用第一问结论先将左边进行放缩 (并且注意到 $f(x)_{min}=-3$ 还是看起来比较舒服的), 再来看看右边是什么样一个情况.

证明. 不等式等价于

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x}-x-3$$

令 $g(x)=\frac{2\ln x}{x}-x-3$, 对 $g(x)$ 求导

$$g'(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{2-2\ln x-x^2}{x^2}$$

于是令 $h(x)=2-2\ln x-x^2$, 显然 $h(x)$ 单调减, 且

$$\begin{cases} h(1)=2-0-1=1>0 \\ h(e)=2-2-e^2=-e^2<0 \end{cases}$$

所以存在隐零点 x_0 满足 $g'(x_0)=0$, 也即 $2\ln x_0=2-x^2$. 代入 $g(x)$ 消去 $\ln x$ 得

$$\begin{aligned} g(x_0)&=\frac{2-x_0^2}{x_0}-x_0-3 \\ &=\frac{2}{x_0}-2x_0-3 \\ &<2-2-3 \\ &=-3 \\ &=f(x)_{min} \end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{例题 2}}$已知函数 $f(x)=x(a+\ln x)-e^{x-1}\quad(a\in R)$, 证明: 当 $a\in(-\infty,0)$ 时, 对任意的 $x\in(1,+\infty)$, 有 $f(x)+1<\frac{1}{x-1}-\frac{x}{e^x}$ 恒成立.

分析: 第一个操作要迅速定位在参数 a, 不论如何都要知道怎么去处理参数. 很显然此处 a 的 "系数" 是 $x>1>0$, 故 a 是无用参数, 直接令 $a=0$[9]. 注意到的第二个问题应该是 $\frac{1}{x-1}$ 当 $x\to1$ 时趋近于正无穷. 所以右边一开始就是一个很大的量, 而左边减去 e^{x-1} 就是疯狂地在减

[9]注意此时等价的不等式可以取等.

小.
第一种想法, 直接求导, 导数根本没法判断正负也无法整理;
第二种想法两边同时除以 x, 再求导. 这样是有道理的, 因为将 $\ln x$ 相乘的多项式除去, 求导后就只剩 $\frac{1}{x}$, 不然有 e^x和 $\ln x$ 基本没法处理[10]. 并且 $\frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ 这是一个很好的效果, 求导也方便, 但是很快就会发现在本题中这么处理一点用都没有.
第三种想法, 所以问题到底在哪? 其实刚才也发现了, 两边不是势均力敌, 而是差别很大, 在起点 1 处, 右边就已经调到无穷了. 而且 1 这个点根本没法取, 并且就算有隐零点也不知道该怎么放缩. 所以先两边同乘 $(x-1)$ [11]把这个大问题先处理一下. 然后接下来发现还是没办法....
所以这个明明两边应该差别很大应该很容易证明的不等式为什么就是一直搞不出来? 问题就是在差别太大, 求导之后无从下手, 所以一开始就应该来一个大的放缩, 而这需要经常观察才能又快又准.

证明. 令 $g(x) = x\ln x - e^{x-1}$, 对 $g(x)$ 求导得

$$g'(x) = \ln x + 1 - e^{x-1}$$

进一步求导

$$g''(x) = \frac{1}{x} - e^{x-1} \downarrow$$

所以 $g'(x) < g'(1) = 1 - 1 = 0$, $g(x)$ 单调递减, $g(x) < g(1) = -1$.
所以左边打从一开始就小于零, 还是一直减少的. 这里看到零应该要很注意, 零对于证明不等式来算真的太友好了, 因为分式求导很麻烦, 其实是一直都在避免的, 一旦不等式一边是零, 就可以 "瞎乘". 从而简化不等式证明.
欲证明 $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{e^x} \geq 0$, 其等价于

$$e^x - x^2 + x \geq 0$$

令 $h(x) = e^x - x^2 + x$, 对 $h(x)$ 求导

$$h'(x) = e^x - 2x + 1$$

再求一次导

$$h''(x) = e^x - 2 > 0$$

所以 $h'(x) > h'(1) = e - 1 > 0$, 所以 $h(x) > h(1) = e > 0$. □

5.3 变形

不等式同乘除可以改变导数情况, 也就是改变函数形态, 是极值位置发生改变而利于解题.

$\boxed{\text{例题 1}}$求证:

$$e^x + (1-e)x - x\ln x - 1 \geq 0$$

[10]其实上一题也是类似的, 在大多数情况, 若是 $\ln x$和e^x 同时出现时几乎都不能直接求导, 因为求导后很难分析.
[11]这个思想也很常使用, 原本不能取的点, 两边乘一下就可以了.

解法一 (直接求导):
令 $f(x)=e^x+(1-e)x-x\ln x-1$, 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x)=e^x-\ln x-e$$

对这个没什么法子, 所以继续求导
$$f''(x)=e^x-\frac{1}{x}\uparrow$$
但是 $f''(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$而$f''(1)=e-1>0$, $f'(x)$ 先增后减... 接下去我没有再试 (f'(x) 应该是有两个零点的), 读者有兴趣自行尝试.
解法二 (变形):
有一个很看不顺眼的就是求导后 $\ln x$ 和 e^x 均存在. 一般的操作方法就是将 $\ln x$ 的 "系数" 去除, 进而达到求导后无 $\ln x$ 的效果.
不等式等价于
$$\frac{e^x}{x}+1-e-\ln x-\frac{1}{x}\geq 0$$
令 $f(x)=\frac{e^x}{x}+1-e-\ln x-\frac{1}{x}$, 对 $f(x)$ 求导
$$f'(x)=e^x(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(e^x-1)}{x^2}$$
所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取到最小值

$$f(x)_{min}=f(1)=e+1-e-0-1=0$$

$\boxed{\text{例题 2*}}$求证:
$$x\ln x+x^2+e^{-x}-x\geq 0$$

证明. 采用上一题的思想, 两边同除以 x, 则不等式等价于

$$\ln x+x+\frac{1}{xe^x}-1$$

令 $f(x)=\ln x+x+\frac{1}{xe^x}-1$, 对 $f(x)$ 求导

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x}+1+\frac{1}{e^x}(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x})\\&=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(1-\frac{1}{e^xx}\right)\end{aligned}$$

很显然又是一个隐零点 x_0 满足 $e^{x_0}x_0=1$. 也即 $\ln x_0+x_0=0$. 代入 $f(x_0)$ 得

$$f(x_0)=\ln x_0+x_0+1-1=0$$

□

可能会觉得很奇妙且不可思议, 但是看到此题应该迅速联想到讨论参数恒成立时的最后一题福建省质检. 当时直接分参几乎难以处理, 当 $a=1$ 时导数可以因式分解并且也有一个隐零点的效果和此题几乎一样, 即代入 $f(x_0)$ 得到 0. 直接分参其实也做得出来, 因为里面有一个函数. 所以看到本题也应该要想到如果直接求导可能会有一个函数, 如果没有想到, 提醒自己以后遇到相似问题要懂得多联想.

所以这里有没有函数在里面呢? 为了防止混淆, 令 $g(x)=x\ln x+x^2+e^{-x}-x$, 对 $g(x)$ 求导

$$g'(x)=\ln x+2x-e^{-x}$$

令 $g'(x)=0$ 可以得到

$$\ln x+x=e^{-x}+(-x)$$

所以这个函数是 $\ln x+x$. 余下步骤留给读者完成.

例题 3 [2014 全国卷 I] 求证:

$$e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}>1$$

证明的第一个途径 (利用一般的变形思想):

证明. 不等式等价于

$$\ln x+\frac{2}{ex}-\frac{1}{e^x}>0$$

令 $f(x)=\ln x+\frac{2}{ex}-\frac{1}{e^x}$, 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{ex^2}+\frac{1}{e^x}$$

这个几乎处理不动. 当然也不是就没办法了.

注意到: $e^x\geq ex$ 和 $x\ln x\geq -\frac{1}{e}$, 由此即得

$$\begin{cases}\ln x+\frac{1}{ex}\geq 0\\ \frac{1}{ex}-\frac{1}{e^x}\geq 0\end{cases}$$

故

$$\ln x+\frac{2}{ex}-\frac{1}{e^x}\geq 0$$

两个不等式取等条件不同, 故等号不成立. □

注: 此法由蔡嘉贤提供.

证明的第二个途径 (利用熟悉函数):

证明. 不等式等价于

$$x\ln x-\frac{x}{e^x}>-\frac{2}{e}$$

注意到

$$x\ln x\geq -\frac{1}{e}$$

和

$$\frac{x}{e^x}\leq\frac{1}{e}$$

由这两个不等式即证. □

注: 几个重要函数 $x\ln x,\frac{\ln x}{x},xe^x$和$\frac{x}{e^x}$ 要有大致了解, 就算记不住最值. 实际上第一种证明也用了 $x\ln x$ 最小值 $-\frac{1}{e}$, 其实这两种方法在某种程度上来说是一样的.

5.4 离散型

有些导数题涉及关于正整数 n 的和式, 在此称为离散型的问题. 此类问题的解决方法一般有两种, 一种各项放缩求和, 另一种是数学归纳法. 正常来说标准答案的方法应该是各项放缩, 但是做种题目最好要一直有数学归纳法的思想, 拆大为小. 一般此类题均是由前面的小题得到的不等式进行放缩, 会有一些不等式变形, 还会有一些技巧性的东西 (没有固定方法). 需要注意的是, 对于这么多项进行放缩, 往往不等式不会很 "紧", 所以此类题目需要多多尝试, 有时候用其他放缩也能得到结果, 而不要因为一直不能在形式上和题目达到一致而烦躁.

例题 1 证明:

$$(n^2+1)(n^2+2)(n^2+3)\dots(n^2+n) > \sqrt{e}\cdot n^{2n}$$

对任意的 $n \in N^*$ 均成立.

证明.

$$\begin{aligned}
&(n^2+1)(n^2+2)(n^2+3)\dots(n^2+n) > \sqrt{e}\cdot n^{2n}\\
\Leftrightarrow\ &\ln(n^2+1)+\ln(n^2+2)+\dots+\ln(n^2+n) > \frac{1}{2}+2n\ln n\\
\Leftrightarrow\ &\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\ln(1+\frac{n}{n^2}) > \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n^2}) > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

注意到:

$$\ln(1+\frac{i}{n^2}) \geq 1-\frac{n^2}{n^2+i} = \frac{i}{n^2+i}$$

只需证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i} \geq \frac{1}{2}$$

这里就需要技巧, 因为 $\frac{i}{n^2+i} \geq \frac{i}{n^2+n}$, 将分母放缩便于求和. 得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i} &> \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}\\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2+n}\\
&= \frac{n(n+1)}{2n^2+2n}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

例题 2 [2013 福建预赛] 已知函数 $f(x) = 2\ln(x+1)+\frac{1}{x(x+1)}-1$;

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值;

(2) 对于任意的 $n \in N, n \geq 2$, 证明:

(i) $\ln 1+\ln 2+\ln 3+\dots+\ln n > \frac{(n-1)^2}{2n}$;

(ii) $\ln^2 1+\ln^2 2+\ln^2 3+\dots+\ln^2 n > \frac{(n-1)^4}{4n^3}$.

(1) 解:

对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2(x+1)^2}(2x^3 + 2x^2 - 2x - 1) > 0$$

所以 $f(x)$ 单调增, $f(x)_{min} = f(1) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

(2)

(i)

证明. 由 (1) 得

$$\begin{aligned} 2\ln n + \frac{1}{(n-1)n} &\geq 2\ln 2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \ln n &\geq \ln 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \ln i &= \sum_{i=2}^{n} \ln i \\ &\geq (n-1)\ln 2 + \frac{n}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - 1) \\ &> \frac{n-1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n-1}{2n} \\ &= \frac{n^2 - n + \frac{n^2}{2} - n + 1}{2n} \\ &> \frac{(n-1)^2}{2n} \end{aligned}$$

□

注: 一般地, 要证明类似 $F(n) \leq A_n$ 的不等式, 常常先计算 $A_n - A_{n-1}$ 再证明 $F(n) - F(n-1) \leq A_n - A_{n-1}$, 这实际上是数学归纳法的思想. 本题也可通过此方法证明

$$\frac{(n-1)^2}{2n} - \frac{(n-2)^2}{2(n-1)} = \frac{n^2 - n - 1}{2n(n-1)} < \frac{1}{2}$$

实际上本题是一个搞笑不等式, 因为 n 越大时 $f(n-1)$ 和 $f(1)$ 差别越来越大, 也就是不等式越来越松. 一般来说, 这种不等式都是 n 越大越接近, 才算比较成功的题目. 实际上 $\ln n > \ln 2 > \frac{1}{2}$, 因此

$$LHS > \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)^2}{2(n-1)} > \frac{(n-1)^2}{2n} = RHS$$

证毕.

(ii)

证明. 由柯西不等式

$$\begin{aligned} LHS \times (1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2) &\geq (\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n)^2 \\ &> \frac{(n-1)^4}{4n^2} \\ \Leftrightarrow LHS &> \frac{(n-1)^4}{4n^3} \end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{例题 3}}$[2011 福建预赛] 已知函数 $f(x)=e^x-x-1$;
(1) 求证: $f(x)\geq 0$ 恒成立;
(2) 求证: $(\frac{1}{2n})^n+(\frac{3}{2n})^n+\ldots+(\frac{2n-1}{2n})^n<\frac{\sqrt{e}}{e-1}$ 对一切正整数 n 恒成立.

分析: 本题不等式右边是个常数, 此类题一般会比较难. 因为不能数学归纳法的思想对右边逐项求差, 可以自己写几项观察出一个更强的结论再用此方法, 一般也很难想. 不过一般这种题目用题目所给不等式放缩就能得到结果, 当然如果做多一点有点经验可能就可以更快地知道用哪个不等式去放缩了.
(1) 略.
(2)

证明. 因为

$$1-\frac{i}{2n}\leq e^{-\frac{i}{2n}}$$

所以

$$\begin{aligned}LHS &< e^{-\frac{1}{2}}+e^{-\frac{3}{2}}+e^{-\frac{2n-1}{2}}\\ &=\frac{e^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}\\ &=\frac{\sqrt{e}(1-e^{-n})}{e-1}\\ &<\frac{\sqrt{e}}{e-1}\end{aligned}$$

□

注: 这里其实就是一个等比数列, 其实有

$$1+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}<\frac{1}{1-x}$$

其中 $0<x<1$. 知道这一点对数列放缩也有帮助, 实际上当 $n\to\infty$ 时, 就等于 $\frac{1}{1-x}$.

$\boxed{\text{例题 4}}$[2013 大纲全国] 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$;
(1) 若 $x\geq 0$ 时, $f(x)\leq 0$, 求 λ 的最小值;
(2) 设数列 a_n 的通项 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, 证明:

$$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2.$$

(1) 用常规参数求法可得

$$\lambda\geq\frac{1}{2}$$

(2)

证明. 由 (1) 得

$$\ln(1+x)\leq\frac{x(1+\frac{1}{2}x)}{1+x}$$

用 $\frac{1}{n}$ 代替 x 得[12]

$$\begin{aligned}\ln(n+1)-\ln n &\le \frac{1+\frac{1}{2n}}{n+1}\\ &=\frac{2n+1}{2n(n+1)}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

这边的化简还是有技巧的.
观察不等号左边

$$LHS=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}$$

可能还是看不出什么, 于是先对 ln 进行求和观察一下

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{i})<\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})\\ \Leftrightarrow\ &\ln n<\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

所以可以看到一些端倪了, 应该调整求和的范围.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=n}^{2n-1}\ln(1+\frac{1}{i})<\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n+1}+\ldots+\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{2n})\\ \Leftrightarrow\ &\ln 2n-\ln n<\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}+\frac{1}{4n}\\ \Leftrightarrow\ &a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2\end{aligned}$$

□

注: 其实可以发现此类题型很大一部分精力用在对式子变形放缩上, 这些一般是需要一些代数变形技巧的, 需要多总结.

5.5 拓展不等式

高考或者模拟时可能出现的题型我们已经几乎讨论完了. 利用这些知识也几乎可以解决或者可以通过题目所给的提示解出所有的题. 导数不等式的证明是水最深的一块区域, 涉及到估值, 数值放缩, 利用不等式放缩, 零点存在说明还有分段讨论证明. 有些存粹的不等式证明更甚至是通过电脑绘图得到的, 能做出的几率都很小, 很多时候都是试出来的, 更别说什么套路和一般方法了, 有时候参考答案都只能用来欣赏. 而这里则是为了让想更进一步的人更好地快速入题, 对不等式处理有更深了解. 再介绍几个可能作为题目背景的不等式.
1.

$$\ln x\ge\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x\in(0,1])$$
$$\ln x\le\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x\in[1,+\infty))$$

[12] $\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n$, 而且 n 越大 $\frac{1}{n}$ 越小, 不等式放缩程度越小.

证明, 直接求导证明. 常见变形

$$\ln(1+x) \le \frac{x}{\sqrt{x+1}}(x \ge 0)$$
$$\ln(1+x) \le \frac{x(1+\frac{x}{2})}{x+1}(x \ge 0)$$
$$\ln(1+\frac{1}{x}) \le \frac{1}{x}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1})(x > 0)$$

第一个即用 $\sqrt{x+1}$ 代替 x 即可;
第二个用 $(x+1)$ 代替 x 即可;
第三个用 $\frac{1}{x}$ 代替第二个中的 x.
2.

$$\ln x \le \frac{2(x-1)}{x+1}(x \in (0,1])$$
$$\ln x \ge \frac{2(x-1)}{x+1}(x \in [1,+\infty))$$

证明, 同样直接求导证明. 常见变形

$$\ln(x+1) \ge \frac{2x}{x+2}(x \ge 0)$$
$$x \ge \frac{2(e^x-1)}{e^x+1}(x \ge 0)$$

证明, 都是简单代换.

1 和 2 两个不等式及其变形, 等号条件都是 $\ln() = 0$ 和 $e^{()} = 1$. 并且都是分了两段, 所以当 x 的取值刚好在某一边, 很可能会用这两个不等式的其中一个作为背景. 最常利用这两个不等式的是参数取值, 在某些是时候, 参数位置非常奇葩, 用这两个不等式先猜出答案则会省下很多时间. 其实刚刚讨论的上一小节的最后一题也就是第一个不等式后面的两个变形. 如果知道这一点, 会节约很多思考时间. 一般来说很有必要使用这两个不等式时, 往往第一小题就是在暗示其中一个不等式.

3.
$$e^x \ge 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}(x \ge 0)$$
证明, 直接求导. 其实这个就是 e^x 在 0 处**泰勒展开**, 但是这个不要求我也不做说明, 因为高中知识没法讲清楚. 也没必要讲太多这些高级结论, 搞得不伦不类. 而这个主要用于一些更强一点的不等式, 这个时候 $e^x \ge x+1$ 不太够用了. 但是绝大多数情况是没有必要的.

以这些不等式为背景的参数问题前面已经出现过不少, 又或者是利用这些不等式迅速判断导数正负. 读者在学习中可以发现更多, 在此不再叙述此类问题, 因为只要知道参数范围再去证的话容易很多, 套路也都差不多, 可以多总结一些优秀处理方法. 这里稍微讲一下一些在不等式证明中的应用.

例题 1 [2019 厦门质检] 已知函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+1) - ax$;
(1) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $a = -2$, $-1 < x < 0$, 求证 $f(x) > 2x(1-e^{-x})$.
(1) 解:

$f(x)$ 在定义域内单调递增. 注意到 $f(0)=0$, 这边可以得到不等关系.
(2)

证明. 不等式等价于

$$(x-2)\ln(x+1)+\frac{2x}{e^x}>0$$

可以直接求导证明, 但是挺麻烦的. 读者可以尝试, 前面也说过, 对于 e^x 和 $\ln x$ 的情况, 一般要消去一个. 注意到这里 x 的取值范围, 这里可以利用 (1) 所得到的不等式, 其实也就是拓展不等式的第二个

$$\ln(x+1)\le\frac{2x}{x+2}$$

因此只需证明

$$\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{e^x}<0$$

参考答案就这里搞出来好几种解法, 但是我还是建议不要瞎捣鼓. 这么一个不等式搞好几种做法只能说明不知道找最好的方法, 我建议还是直接两边同乘以消去分式.
当然这题还有更特殊的部分, 甚至可以直接把 e^x 也放掉, 利用

$$x\le\frac{2(e^x-1)}{e^x+1}$$

得到

$$\frac{1}{e^x}\le\frac{2-x}{2+x}$$

代入上面欲证不等式即证. □

注: 后面对 e^x 放缩的方法由 *Dylan* 提供.
例题 2 证明不等式

$$(e^x-1)\ln(x+1)>x^2(x\ge 0)$$

分析: 这已经是正常很难的不等式的形式的, 直接要求证明一个不等式. 有的时候甚至给了近似值, 这种情况很可能需要分段讨论. 本题用比较弱的那两个不等式是没办法证明的, 这里 e^x 的放缩和 $\ln(x+a)$ 的放缩都需要加强, 利用

$$e^x\ge 1+x+\frac{x^2}{x}$$

证明. 注意到

$$e^x-1\ge\frac{x^2}{2}+x$$

和

$$\ln(x+1)\ge\frac{2x}{x+2}$$

相乘即证. □

注: 这种题目很可能是为了利用某一性质凑出来的题目, 一般了解的东西不够多是很难下手的.

5.6 对数均值不等式

接下来介绍一个极其强大的不等式, 对数均值不等式. 此不等式较强, 且出现频率高, 在 19 年模拟中多次出现. 并且利用此不等式解题会使解答变得非常简洁对称甚至完美, 这是其他许多解法都望尘莫及的.

5.6.1 对数均值不等式

对 $\forall x_1, x_2 > 0(x_1 \neq x_2)$, 均有

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

5.6.2 证明

注意: 此不等式一旦使用必须证明. 思想仍是消元, 以不等式左边为例做个证明示范.

证明. 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 不等式等价于

$$\ln \frac{x_2}{x_1} \leq \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

令 $t = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > 1$, 则有不等式等价于

$$2 \ln t - t + \frac{1}{t} \leq 0(t > 1)$$

令 $f(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x}$, 求导得

$$\begin{aligned} f^{(}x) &= \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= -(\frac{1}{x} - 1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 也即

$$f(x) < f(1) = 0$$

□

注: 其实后面那个等价函数就是上一小节的第一个不等式. 实际上在很早的时候已经说过这两个不等式等价, 即讨论双变量问题时的 18 全国卷 I, 接下来也会利用新方法来重新做一下这道题.

5.6.3 几何意义

如图, 在 $y = \ln x$ 的图像上任取两点 A, B. 以不等式右边进行说明

$$\frac{2}{x_1 + x_2} \leq \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$$

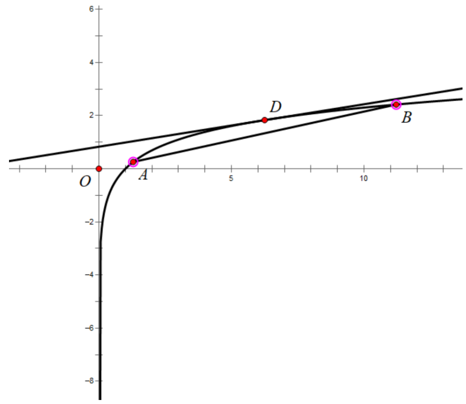

图 2: $y = \ln x$ 图像

为方便说明, 记 AB 在 $y = \ln x$ 的中点为 D, 并过 D 做函数 $y = \ln x$ 的切线 l, 则 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$ 即为直线 AB 的斜率 k_{AB}, 而 $\frac{2}{x_1+x_2}$ 即为 l 的斜率 k_l. 那么, 由此不等式可以得到

$$k_{AB} \geq k_l$$

y 也就是说在 $y = \ln x$ 的图像上任意两点的斜率大于其中点在 $y = \ln x$ 的切线的斜率.[13]

注: 其实也可以看到当 A, B 越来越靠近, k_{AB} 和 k_l 越来越接近. 当 A, B 无限靠近, 最后就是直线 AB 成了切线, 也是 "等号成立" 的条件. 这里其实可以联想到以前曾经做过的一些题, 其问法为

$$f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) > 0(< 0)$$

其中 x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个不相同的零点. 但是这边好像没有零点, 但是我分分钟都能搞出一个, 只要把直线 AB "减掉" 就行了. 比如设 $A(1, 0)$ 和 $B(e, 1)$, 则直线 $AB : y = \frac{1-0}{e-1}(x - 1)$.

$$令 f(x) = \ln x - \frac{1}{e-1}(x - 1)$$

则 $1, e$ 是两个零点. 实际上很多这种题都是以这个为背景设计的, 自然也能用这个不等式解决.

5.6.4 应用

壹. 韦达定理

如果仔细观察的话会发现, 许多导数题涉及双变量及一元二次方程[14], 而本结论的形式 $(x_1 + x_2)$ 与 $\sqrt{x_1 x_2}$ 就不得不想到韦达定理. 在此类题目中, 往往一次项系数或者常数项为常数, 进而便于不等式放缩.

例题 1 [2018 全国卷 I] 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x (a > 2)$, 存在两个极值点 x_1 和 x_2 且 $0 < x_1 < x_2$, 求证

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2.$$

[13] 此处的中点意为函数图像上的中点.

[14] 导数常是二次方程

证明. 对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{1}{x^2}(x^2 - ax + 1)$$

所以有

$$x_1 x_2 = 1$$

则

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{\frac{1}{x_1} - x_1 + a\ln x_1 - \frac{1}{x_2} - x_2 + a\ln x_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{-2(x_1 - x_2) + a(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= -2 + a\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \\ &< -2 + a\frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \\ &= a - 2 \end{aligned}$$

□

注: 本题本来就不是难题, 在前文也已出现, 再次说明旨在加深对该不等式的理解.

贰. 某一类极值点偏移

极值点偏移是一类 “入门题”, 较难的极值点偏移一般通过复杂的参数设置, 分段实现复杂函数, 但解法一般大同小异. 前面讲过某些极值点偏移可以用**合分比**性质来做, 实际上一般都是以此为背景. 可以直接用这个不等式解决.

例题 2* 已知函数 $f(x) = e^x - ax \quad (x \in R)$ 有两个不等根 x_1, x_2, 求证:[15]

$$x_1 \cdot x_2 < 1$$

证明. 由已知得

$$\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_2}}{x_2}$$

推出 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1$, 因此

$$x_1 \cdot x_2 = \sqrt{x_1 x_2}^2 < \left(\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}\right)^2 = 1$$

□

注: “参数复杂化” 前文好像没有提到, 例如函数 $y = e^x - x$ 可以这样处理

$$e^x - x = a \Rightarrow x = \ln(x + a)$$

可以构造函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 从而实现复杂化.

叁. 多项式化处理

涉及双变量不等式的题目需要消元, 构造单变量函数求导 (或不停地求导) 即可做出. 但实际上这样比较繁琐, 这个不等式还有另一个很强的作用就是把 $\ln x$ 消去, 转化为多项式 (多项式可以因式分解从而比较方便).

[15] 和极值点偏移部分例题 3 题干相同, 其实那题的 (1) 也可用此不等式解决.

注: 这样处理还有一个很重要的原因在于此不等式较强 (一般放缩不会过度), 且等号成立条件一般和题目相同 (如不同, 则慎用).

$\boxed{\text{例题 3}}$[2019 泉州一模] 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+bx+a\ln x(a+b=-1\text{且}a>1)$ (即 1 为极大值点) 若 $\exists x_0$ 使得 $f(x_0)=f(1)(x_0\neq 1)$, 求证:

$$a<x_0<a^2.$$

分析: 这是一道不错的题, 前面没有提及. 因为其普通求导方法需要通分用到一些分解因式小技巧, 没什么好说的. 这里用对数均值不等式看看会有什么效果.

证明. 对 $f(x)$ 求导

$$\begin{aligned}f'(x)&=x-(a+1)+\frac{a}{x}\\&=\frac{1}{x}(x^2-(a+1)x+a)\\&=\frac{1}{x}(x-a)(x-1)\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,1),(a,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(1,a)$ 单调递减 $\Rightarrow x_0>a$.
再来说明不等式右边成立:

$$x_0<a^2\Leftrightarrow f(x_0)<f(a^2)$$

这时候化单变量为双变量方便利用不等式: $x_2=a^2,x_1=1$.
利用求差证明大小关系:

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_0)&=f(x_2)-f(x_1)\\&=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)+a(\ln x_2-\ln x_1)\\&=(x_2-x_1)\left(\frac{x_1+x_2}{2}+b+a\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}\right)\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}m&=\frac{x_1+x_2}{2}\\&\geq\sqrt{x_1x_2}\\&=\sqrt{1\times a^2}\\&=a\end{aligned}$$

等号不成立, 上式大于等于

$$(x_2-x_1)(m-(a+1)+\frac{a}{m})=\frac{x_2-x_1}{m}(m-a)(m-1)>0$$

□

$\boxed{\text{例题 4}}$函数 $f(x)=e^{2x}+(a-ax)e^x$, x_1,x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点, 且 $0<x_1<x_2$; 若 $x_1x_2+m(x_1+x_2)<0$ 恒成立, 求: 实数 m 的取值范围. [16]

[16]本题也是双变量问题那一节的例题 8.

证明. 注意到:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x(2e^x - ax) \\
&\Rightarrow \frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_2}}{x_2} \\
&\Leftrightarrow \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1
\end{aligned}
$$

故原不等式 $\Leftrightarrow -m > \frac{x_1 x_2}{x_1+x_2}$, 为了解决不齐次的问题, 由均值不等式

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$$

其实利用 $x_1x_2 \leq \frac{(x_1+x_2)^2}{4}$ 也可以, 读者可自行尝试. 于是

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} &\leq \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2} \\
&< \frac{1}{2}\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} \\
&= \frac{1}{2}. \\
\Rightarrow m &\leq -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

注: 本题参数可以顺利解出的一个重要条件是, 每一步放缩的等号条件相同.[17]

5.7 参数与零点存在

5.7.1 几道例题

$\boxed{\text{例题 1}}$[2017 全国卷 I] 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$, 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

解:

对 $f(x)$ 求导

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2ae^{2x} + (a-1)e^x - 1 \\
&= (ae^x - 1)(2e^x + 1)
\end{aligned}
$$

1) $a \leq 0$, $f'(x) < 0$ 恒成立. 故 $f(x)$ 单调, 不可能有两个零点.

2) $a > 0$, 则 $f'(\ln\ln\frac{1}{a}) = 0$. $f(x)$ 在 $\ln\frac{1}{a}$ 取到最小值. 若能产生两个零点, 则 $f(\ln\frac{1}{a}) < 0$. 即

$$\ln a + 1 - \frac{1}{a} < 0$$

注意到 $f(\ln\frac{1}{a})$ 关于 a 单调增, 且当 $a = 1$ 时, $\ln a + 1 - \frac{1}{a} = 0$. 因此得到一个**必要条件**

$$a \in (0, 1)$$

[17]包括对数均值不等式, 等号条件理解为极限.

其实这个已经是充要的了, 因为其实不管 $x \to +\infty$ 还是 $x \to -\infty$, 都有 $f(x) \to +\infty$. 正常情况下, 根据零点存在定理很容易证明一个零点存在, 一般这种都是利用隐零点的题目. 但是为什么绝大多数人这里不这么做而是偏向于利用极限将此当做显然? 当然第一个很重要的原因是隐零点的范围很重要必须得确定, 还有一个就是这里并不是仅代入一个常数就能解决问题的. 但是严谨来说, 这一步必须有, 至于不写扣多少分, 不在我的考虑范围内.
先看 $x < \ln\frac{1}{a}$ 这一部分, 当 x 很小的时候, e^{2x} 和 e^x 都会趋近于零, 所以这里的关键是 $-x$ 最终会变为无穷大. 主要要做的事情就是怎么处理 $(a-2)e^x$ 这一项, 因为只有这一项才是小于零的. 由于最后起决定因素的是 x, 所以先放掉 e^{2x} 这个 "无用" 的项, 欲寻找 x_0 满足

$$f(x_0) > -x_0 + (a-2)e^{x_0} > 0$$

利用 $e^x < 1$ 寻找更简单的 x_0

$$\begin{aligned} f(x_0) &> -x_0 + (a-2)e^{x_0} \\ &> -x_0 + (a-2) \end{aligned}$$

故只需要取 $x_0 = a - 2 < 0$ 即可.
再看 $x > \ln\frac{1}{a}$ 这一部分, 当 x 很大的时候, e^{2x} 会变得超级大, 超过 e^x 和 x. 也就是现在关键的是 a 出现在两个大数字的系数上, 为方便进一步放缩, 将正项写一边, 负项写一边

$$ae^x(e^x + 1) - 2e^x - x$$

所以先要取适当的值消去 a 以方便说明减去 $2e^x + x$ 仍会大于零. 消去 a 的最直接方法是取 $x_1 = \ln\frac{1}{a}$, 但是这个刚好是极小值点, 我们所需要的是 $x_1 > \ln\frac{1}{a}$. 但是没关系, 可以待定一个参数 $m > 1$, 取 $x_1 = \ln\frac{m}{a} > \ln\frac{1}{a}$. 欲证明

$$m(e^{x_1} + 1) - 2e^{x_1} - x_1 > 0$$

可以看到主要想证明 $(m-2)e^{x_1} - x_1 > 0$, 多余的 m 已经成为 "累赘". 最直接的就是 m 取 2, 但是 x_1 没有处理, 故取 $m = 3$, 则有

$$\begin{aligned} (m-2)e^{x_1} - x_1 &= e^{x_1} - x_1 \\ &> 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

这样就严谨地说明了充分性.

$\boxed{\text{例题 2}}$ 已知函数 $f(x) = \ln x - ax - 3 (a \neq 0)$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.
解:
对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a$$

1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调增. 观察 $f(x)$ 可以知道应该有一个零点, 但需要说明零点存在.
先找使 $f(x) < 0$ 的点, 特殊点 $f(1) = -a - 3$ 不能判断正负, 其实也就是 1 还不够小. 希望通过 ln 凑出一个 a 用于因式分解直接说明

$$\ln x_0 - ax_0 < 0$$

最直接的想法是取 $x_0 = e^a < 1$ 直接将 ln 变为 a.

$$f(x_0) = a(1 - x_0) - 3 < 0$$

注意这里我只将 ln 部分用 a 代替, 而括号内仍保留 x_0. 这样子做比较直观, 并且如果需要进一步放缩或者修改取值比较有方向.
再找使得 $f(x) > 0$ 的点. 由于 $-ax$ 已经大于零, 而 $\ln x$ 只要 $x > 1$ 就可以大于零. 所以现在比较关键的问题是 -3 怎么处理. 最直接简单的方法是取 e^3 直接得到

$$f(e^3) = -ae^3 > 0$$

其实也可以取 $1 - \frac{3}{a}$ 在 $-ax$ 中创造出一个 3 来, 可以再去想想这一步的过程.
2) 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 先增后减, 在 $x = \frac{1}{a}$ 处取到极大值.
(i) 当 $f(\frac{1}{a}) = 0$ 时, 即

$$-\ln a - 4 = 0$$

得到 $a = e^{-4}$, 显然 $f(x)$ 只有一个零点.
(ii) 当 $f(\frac{1}{a}) < 0$, 即 $a > e^{-4}$ 时, $f(x)$ 无零点.
(iii) 当 $f(\frac{1}{a}) > 0$, $a < e^{-4}$ 时, 观察 $f(x)$. 可以知道应该有两个零点. 所以又要证明两个零点的存在.
很容易发现刚才分析的 $f(1)$ 现在有用了 $f(1) < -a - 3 < 0$ 且 $1 < \frac{1}{a}$, 所以左边的零点已经找到.
再来想右边的. 可以发现 -3 其实无关紧要, 最终必是 ax 超过 $\ln x$. 注意到这个 a 还是很讨厌, 最直接的, 取 $\frac{1}{a}$. 但是这个刚好是极值点, 于是再待定一个参数 $t > 1$. 取 $x_1 = \frac{t}{a}$, 代入 $f(x)$ 得到

$$f(x_1) = \ln x_1 - t - 3$$

注意到

$$\begin{aligned}\ln x_1 - t - 3 &< x_1 - 1 - t - 3 \\ &= t(\frac{1}{a} - 1) - 4\end{aligned}$$

发现无法确定符号, 问题还没有解决. 其实就是 $\frac{t}{a}$ 不够大. 试着处理一下 ln, 取 e^a 代入得 $a(1 - e^a) - 3$. 这是类似前面的取法, 但是有些东西需要注意一下, 一个是 a 现在是大于零的, 另一个更重要的是 $e^a < 1 < \frac{1}{a}$. 也就是找错边了. 为了保证不找错边, 还是利用刚才的想法, 取 $x_1 = \frac{t}{a}$. 不过刚才也发现了, 这个数可能不够大, 那怎么办? 可以更改待定的数, 取 $x_1 = \frac{e^t}{a}$. 代入得

$$\begin{aligned}f(x_1) &= t - \ln a - e^t - 3 \\ &< t + \ln\frac{1}{a} - e^t\end{aligned}$$

这就是主要的问题, 因为 -3 无关紧要. 如果能证明这一点, 其实也就证明 $\ln x - ax$ 最终会小于零的事实. 发现这里用 $e^t \geq 1 + t$ 可能已经不太够了. 于是利用上一小节的第三个拓展不等式

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

及 $\ln x \le x-1$ 得到

$$f(x_1) < \frac{1}{a} - 2 - \frac{t^2}{2}$$

故取 $t = \sqrt{\frac{2}{a}}$ 即证.

注: 最后的零点寻找也可以利用 $\frac{\ln x}{x}$, 但是有些地方需要注意. 要利用洛必达法则说明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

还需要补充说明 $x_0 > \frac{1}{a}$(x_0 是满足 $\frac{\ln x_0}{x_0} = a$ 的点), 即 $a\ln\frac{1}{a} > a$. (另外: 有些人会不接受这个方法)

$\boxed{\text{例题 3}}$[2016 全国卷 I] 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点;

(1) 求 a 的取值范围.

解:

对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = (x-1)(e^x + 2a)$$

参数讨论过程与上一题类似, 在此略去. 最后得到的是 $a > 0$, 我们这里重点放在找零点.(极值点为 1)

很显然, $f(2) = a > 0$. 所以右边已经找到.

接下来思考左边, 可以看到当 $x \to -\infty$, $a(x-1)^2$ 会趋向无穷大, 而 $(x-2)e^x$ 趋向 0^-. 为了方便判断正负, 欲在 $(x-2)e^x$ 找到一个 a 以方便因式分解. 最容易想到的就是取 $x_0 = \ln a$ 则有

$$f(x_0) = a(x_0^2 - x_0 - 1)$$

但是 $x_0^2 - x_0 - 1$ 好像并不恒正并且比较严肃的一个问题是 $\ln a$ 不一定小于 1. 所以应该怎么解决这个问题? 这里有一个比较巧妙的解决方法: 取一个 x_0, 不确定是多少, 但是让它满足 $x_0 < \ln a$, 那么希望得到 $(x_0-2)e^{x_0} > (x_0-2)a$ 从而可以因式分解, 那么需要有 $x_0 - 2 < 0$. 而这也是必须的, 因为 $x_0 < 1$ 才符合想要找的点. 也就是现在我希望取一个 x_0 满足 $x_0 < 1$ 且 $x_0 < \ln a$, 也即

$$x_0 < min\{\ln a, 1\}$$

这里与前面的取法不太相同, 前面都是直接找点, 但是这里找的其实是一个范围. 所以得到

$$f(x_0) > a(x_0^2 - x_0 - 1)$$

但是好像刚才忽略一个问题, 就是 $x_0^2 - x_0 - 1$ 不一定恒正. 但是没关系, 因为 -1 代进去已经大于零了. 所以添加条件 $x_0 < -1$. 所以最后取

$$x_0 < min\{\ln a, -1\}$$

即可.

注: 这里

$$f(x_0) > a(x_0^2 - x_0 - 1)$$

用的不是 $f(x)$ 的单调性, 而是局部放缩, 曾经我忽略这一问题而认为本题的官方解答[18]有误. 从而又另外想了一个方法, 这里也写出来供读者参考:
取 $x_0 = \ln \frac{a}{a+1} - 1 < -1$, 则

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (x_0 - 2) \times \frac{a}{e(a+1)} + a(x_0 - 1)^2 \\ &> a(x_0^2 - x_0 - 1) \\ &> 0 \end{aligned}$$

这里的思考过程不再细述.

$\boxed{\text{例题 4}}$[2019 龙岩期末] 已知函数 $g(x) = e^{x-2} - ax - \ln(x-1) + 2a, a \in R$, $g(x)$ 有且仅有一个零点 x_0, 判断 x_0 与 3 的大小关系.
解:
将 $g(x)$ 向左平移两个单位, 即令 $f(x) = g(x+2) = e^x - \ln(x+1) - ax$.
则很显然此问题等价于 $f(x)$ 有且仅有一个零点 x', 判断 x' 与 1 的大小关系.
对 $f(x)$ 求导

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} - a$$

所以 $f'(x)$ 单调增, 很显然有一个零点. 所以这道题应该是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 有同一个零点. 但是书面证明要说明 $f'(x)$ 为什么有零点. 这个问题会发现取值的时候有麻烦, 主要是因为前面几道题都给了 a 的范围, 而这里没有. 不过没关系, 讨论就行了.
1) 当 $a = 0$ 时, 找两个合适的点代入即可.
2) 当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 小于零的点很好找, 只要满足 $e^x - \frac{1}{x+1} < 0$ 就行了. 接下来看大于零的点, 由前面的经验, 从 e^x 里面找一个 a 把 a 给消掉. 取 $x = \ln a$, 发现还多了一个 $-\frac{1}{x+1}$, 但是注意到 $\frac{1}{x+1} < 1 (x > 0)$. 于是取 $x_0 = \ln(a+1) > 0$[19] 得

$$f(x_0) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0$$

2) 当 $a < 0$ 时, 和上一种情况一样, 只是倒过来变成大于零的点好找. 小于零主要靠 $-\frac{1}{x+1}$, 最终会趋向负无穷. 首先还是先想办法除掉 a, 当然只有唯一的负项 $-\frac{1}{x+1}$ 能做到. 首先利用

$$\frac{1}{x+1} = -a$$

解得

$$x = -\frac{1}{a} - 1$$

但是这样没有处理 e^x, 为了做到这一点, 再待定一个系数. 取 $x_1 = -\frac{1}{ma} - 1$, 代入 $f'(x)$ 得

$$f(x_1) = (m-1)a + e^{x_1} < (m-1)a + \frac{1}{e}$$

欲使上式小于零, 故取

$$m > -\frac{1}{ea} + 1$$

[18]取的是 $min\{0, \ln \frac{a}{2}\}$, 我认为有点多此一举.
[19]此处的 x_0 与题目中的不同.

即可.
继续讨论此题, 由题意得

$$\begin{cases} e^{x'} - \ln(x'+1) - ax' = 0 \\ e^{x'} - \frac{1}{x'+1} - a = 0 \end{cases}$$

由此消去 a 得

$$e^{x'}(x'-1) - \frac{x'}{x'+1} + \ln(x'+1) = 0$$

于是令 $h(x) = e^x(x-1) - \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$, 讨论 $h(x)$ 零点与 1 的关系. 对 $h(x)$ 求导

$$\begin{aligned} h'(x) &= xe^x - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \\ &= xe^x + x\frac{1}{(x+1)^2} \\ &= x(e^x + \frac{1}{(x+1)^2}) \end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)\downarrow$, 在 $(0,+\infty)\uparrow$. 所以 $h(x)$ 可能会有两个零点, 但是如果 $(-1,0)$ 有一个零点, 那肯定已经小于 1 了. 又注意到 $h(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$, 所以 $x' < 1$.
这里可能还有一个问题就是, 有的人可能会搞不明白, 明明说只有一个零点, 现在可能有两个是什么意思. 实际上, $f(x)$ 的零点是和 a 相关的, 如果取了一个零点则由 $f'(x)$ 单调可得到唯一的 a. 所以两个零点取哪个其实都可以, 但是一旦取了, 另外一个就不会是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点.
当然还有最后一个疑惑可能就是到底 $(-1,0)$ 里面有没有零点. 实际上是有的, 因为

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1}$$

因为

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)\ln(x+1) - x = 0 + 1 = 1$$

而

$$\lim_{x\to -1^+} x + 1 = 0^+$$

所以最后会趋向正无穷. 当然这些不需要细究.

5.7.2 小结

此类题目主要是分析构造, 逻辑很重要 (到底是哪一边的零点, 放缩不等号方向有没有问题). 上面介绍了自己认为的一般思路和方法. 一般来说, 找两个零点的题目会比较简单或者其中一个很容易找. 一般情况先观察分析那个 “局部的量”(比如说 e^x 或者是 ax) 会主导整个函数走向, 在放缩时不能把这些量放得太小. 可能有这几种方法或者说是技巧:
1. e^x 处理: 一般先处理 e^x, 或者构造出 e^m 代入;
2. 保留 x_0: 局部进行保留便于观察放缩;
3. 待定系数: 先利用特殊情况得到一个好看的式子, 利用待定系数确定要取的值;
4. 取值限定: 利用 $min\{\}, max\{\}$ 限定 x_0 范围从而获得多条件方便进行下一步正负的判断;
5. 分类讨论: 对参数进行讨论.

6 杂题

6.1 杂题

所谓杂题, 即题目顺序和难度无关.

1#. 已知函数 $f(x) = ax^2 + be^x$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线为 $y = (e-2)x + 1$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: $e^x - x\ln x \geq (e-1)x + 1$.

2*. 已知 $f(x) = \frac{x^2-1}{t\ln x}$ $\quad x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$且$t > 0$.

(1) 若 $f(x) > x$ 在 $f(x)$ 定义域内恒成立, 求参数 t 的取值范围;

(2) 证明:

$$\ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n}.$$

其中 n 为任意正奇数.

3. [2015 全国卷 I 文] 求证: 当 $a > 0$ 时, 不等式

$$e^{2x} - a\ln x \geq 2a + a\ln\frac{2}{a}$$

恒成立.

4. [2019 漳州质检] 证明

$$x\ln x + 1 < e^x - x^2$$

$(\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, e^{\frac{3}{2}} \approx 4.48, e^2 \approx 7.39)$

5. [2019 福建预赛] 已知 $f(x) = e^x$.

(1) 若 $x \geq 0$ 时, 不等式 $(x-1)f(x) \geq mx^2 - 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围;

(2) 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 4\ln x + 8 - 8\ln 2$.

6#. $a, b, c > 0$ 且满足 $abc = 1$, 求证

$$a(e^{2a} - 2) + b(e^{2b} - 2) + c(e^{2c} - 2) > 3$$

7. 证明不等式

$$(x^2 + x) \cdot \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 1}{e^x} < 1 + e^{-2}$$

8. 设 $k \in R$, 函数 $f(x) = \ln x - kx$.

(1) 若 $f(x)$ 无零点, 求实数 k 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2, 求证

$$\ln x_1 + \ln x_2 > 2$$

9*. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 2$ 有两个相异零点, 求证

$$f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$$

10. [2016 福建预赛] 已知 $f(x) = \ln(ax + b) + x^2 (a \neq 0)$.

若 $f(x) \leq x^2 + x$ 恒成立, 求 ab 的最大值.

11*. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ 有两个相异零点 $x_1 < x_2$, $\lambda \geq 1$, 求证

$$\ln x_1 + \lambda\ln x_2 \geq 1 + \lambda.$$

12. [2018 全国卷 III] 已知函数 $f(x) = (2 + x + ax^2)\ln(1 + x) - 2x$;

(1) 若 $a = 0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a.

13. [2015 四川理] 已知函数 $f(x) = -2(x + a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

(1) 设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

6.2 部分答案及提示

1. (1) $a=-1, b=1$; (2) 提示: 利用题目所给的切线进行放缩.

2.

(1) $t=\frac{1}{2}$ 提示: 利用 $\ln x$和$\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ 的关系并利用参数讨论的套路即可.

(2) 本题其实为改编题, 由不等式部分的子部分离散型最后一题知:

$$\ln 2 < \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} + \frac{1}{4n}$$

再注意到:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{2n} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{n}=2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n+2i-1}\right) \\
\because\ &2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n+2i-1}\right) > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \\
\therefore\ &\ln 2 < 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

3. 提示: 隐零点配合均值不等式.

4. 提示: 利用 $\ln x \le x-1$ 进行放缩.

5. (1) $m \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

6. 提示: 利用 $e^{\ln x+2x} \ge \ln x+2x+1$.

7. 提示: 利用 $e^x \ge x+1$.

8. (1) $k>\frac{1}{e}$; (2) 利用 $t=\ln x$ 代换.

9. 提示: 对数均值不等式.

10. $\frac{e}{2}$. 提示: 不等式等价于 $e^x-ax-b \ge 0$ 恒成立.

11. 提示: 利用合分比性质及拓展不等式

$$\begin{aligned}
\ln x_1+\lambda \ln x_2 &= \frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}\cdot(x_1+\lambda x_2) \\
&= \frac{\ln t(\lambda t+1)}{t-1} \\
&> \frac{2(t-1)}{t+1}\cdot\frac{\lambda t+1}{t-1} \\
&= \frac{\lambda t+1}{t+1} \\
&> \lambda+1
\end{aligned}$$

或者一开始就注意到不等式

$$\frac{x+\lambda y}{1+\lambda} \ge \frac{x+y}{2} (y>x>0, \lambda \ge 1)$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\ln x_1+\lambda\ln x_2}{1+\lambda}&\geq\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}\\&=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_1+x_1}{2}\\&\geq 1\end{aligned}$$

12. (1) 提示: 拓展不等式; (2) 因为 $f'(0)=f''(0)=0$, 则 $f'''(0)=0$. 否则可以推矛盾. 一般地, 若 $f(x)$ 在 x_0 处取极值, 则有

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{2n}(x_0)\neq 0$$

13. 提示: 此题很复杂, 隐零点代入后可以看成关于 a 的二次函数因式分解. 最后讨论解的存在性.

7 附录

7.1 隐零点

对于函数 $f(x)$, 满足方程 $f(x)=0$ 的一个解 $x=x_0$ 可以证明其存在性, 但是无法得到代数解. 则一般称 x_0 为隐零点.

7.2 两个必备不等式

1. 第一个不等式

$$e^x\geq x+1$$

在 $x\in R$ 时恒成立, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

证明. 令 $f(x)=e^x-x-1$, 对 $f(x)$ 求导知

$$f(x)\geq f(0)=0$$

故原不等式成立. □

2. 第二个不等式

$$1-\frac{1}{x}\leq\ln x\leq x-1$$

在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立, 当且仅当 $x=1$ 时两边不等号同时成立.

证明. 先证明右边, 方法和第一个不等式证明方法相同, 构造函数求导证明.
将 x 换成 $\frac{1}{x}$ 即证左边.

□

实际上, 1 和 2 这两个不等式是完全等价的[20].

[20]在第二个不等式中令 $x=e^t$ 即得第一个不等式.

7.3 合分比性质

在此不细究比例中的合比和分比, 因为我也记不清了. 直接说在导数中常会用到的性质.

若

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

则有

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

其实印象中这个性质叫等比性.

证明. 令 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, 代入即证. □

7.4 柯西不等式

对于任意的 $a_i, b_i \in R(i = 1, 2, \ldots, n)$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

证明. 对于 $\forall x \in R$, 显然有

$$(a_i x - b_i)^2 \geq 0$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 \geq 0$$

也即说明关于 x 的二次函数

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 0$$

恒成立, 故

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

故原不等式得证. □