常微分方程的微分算子法

iNx

序

余去數學久矣。大二時自以為理清所謂常微分方程之算子法，快然自足，適其時學輔高等數學線上講座，於是欣然參與，作此。今大四矣，翻閱時，多可笑，亦多可嘆。笑者，為其時自得之情，跃然紙上而叙述多不嚴謹之天真而笑；嘆者，為其時慮及此巧計而嘆。今自審而勘誤，存余其時之措辭，其後再讀，亦多感慨。

1 前言

常微分方程是高等数学上册的最后一章，也是我觉得高数上册最有意思的一章。其中常系数线性微分方程是很经典的一类微分方程（也作为考试考查的内容），这样的方程可以被描述为：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = f(x)$$

而一般可以有固定方法求解解析解的 $f(x)$ 被限制为这几类：**指数型、多项式、三角函数**及其组合。我们知道每个方程的解可以由齐次方程的解加上任何一个特解表示，而齐次方程的解法由一元多次方程在复数域上的**根**确定。所以关键问题在于怎么确定方程的一个特解 y_p，众所周知，在高等数学中我们是用**待定系数法**做到的，但当 $f(x)$ 组合了三种形式，待定系数法将变得非常复杂，当时我学习了 MIT 的一门公开课**常微分方程**，觉得里面介绍的**微分算子法**非常清晰且方便，但它仅仅说明了二阶的情况，并且没有给出 $f(x)$ 为多项式时该如何处理。但实际上该方法可以作用于 n 阶的方程，并且也可以使用于 $f(x)$ 为多项式的情况。但是网上关于介绍该方法的文章少之又少并且大多只重结论，有点云里雾里的感觉。于是打算将这些理论严谨地进行解释一遍，并曾经在知乎上发过关于 $f(x)$ 为指数型和三角函数的解法及证明，很长时间我都没有仔细想多项式的情况，现今恰好在电路课程上遇到了常系数微分方程，故细想了一番，在此做一个总结。

2 什么是算子

在大一的时候我们已经接触了不少的"算子"，比如大多数人可以记得的就是多元函数引入了 ∇ 算子，在场论中还出现了 Δ 算子（拉普拉斯算子）。其实简单来说，算子就是一种映射，不过这种映射可能是从函数空间到函数空间的。从表面上看，算子就起到一种简洁表达的效果，其实其巨大威力远远不止于此，我自己能力有限，也知之甚少。另外科研发现其实求导也可以看成是算子，我们定义微分算子符号：

$$D^n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$$

那么例如 y' 就可以写成 Dy，而对于二阶线性微分方程

$$y'' + Ay' + B = f(x)$$

可以写成

$$(D^2 + AD + B)y = f(x)$$

记多项式 $P(x)=x^2+Ax+B$，则上式又可以写成：

$$P(D)y=f(x)$$

所以这样到底有什么好呢，这样的形式容易让人想到实数域内，如果 $kx=b$ 且 $k\neq 0$，则

$$x=\frac{b}{k}$$

也就是我们如果能理解 $\frac{1}{P(D)}$ 的涵义，那我们就能求出 $y=\frac{f(x)}{P(D)}$ ！如果 $P(D)=D$，那么我们其实很容易想到 $\frac{1}{D}$ 就是积分，但是当 $P(D)$ 复杂起来积分就显得很不准确，但是简单来说，就应该是求导的逆运算。接下来我们就由浅入深分析一下。注意接下来的微分方程若没有明确说明则为：

$$P(D)y=f(x)$$

而 y_p 是其一个特解。

3 $f(x)=e^{ax}$

首先我们研究 $f(x)=e^{ax}$ 的情况。

3.1 $P(a)\neq 0$

命题 3.1 (指数代换法则). $a\in\mathbb{R}$，则有：

$$P(D)e^{ax}=P(a)e^{ax}$$

证明. 注意到 $P(D)$ 是由 $1,D,D^2,\ldots$ 及其线性组合表示的，故我们只要证明：

$$D^n e^{ax}=a^n e^{ax}$$

而这是显然的（可以考虑迭代或者数学归纳法）。 □

接下来用此证明一个重要结论：

定理 3.1 (指数输入定理). 若 $P(D)y=e^{ax}$，则一个特解

$$y_p=\frac{e^{ax}}{P(a)}(\text{当}P(a)\neq 0\text{时})$$

这个定理告诉我们，一个特解就是把 $P(D)$ 除到右边并且将指数上 x 的系数带到 $P(D)$ 中将 D 替换即可！

证明. 若要证明 y_p 确实是方程一个特解，只要把它带回去验证即可，则由**指数代换法则**：

$$\begin{aligned}P(D)y_p&=P(D)\frac{e^{ax}}{P(a)}\\&=\frac{P(a)e^{ax}}{P(a)}\\&=e^{ax}=f(x)\end{aligned}$$

故 y_p 是原方程一个特解。 $\square$

注意到三角函数其实是可以用指数来表示的，即**欧拉公式**：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

而这有什么用呢？由于复变函数的求导可以简单理解为分别对实部和虚部求导，于是容易证明对于一个在复数域上的微分方程（但 $P(x) \in R[x]$，就是 $P(x)$ 是实系数的多项式）

$$P(D)y = f(x)$$

的特解 y_p 的实部恰好是

$$P(D)y = \Re(f(x))$$

的特解，同样的其虚部是

$$P(D)y = \Im(f(x))$$

的特解。所以对于 $f(x)$ 是三角函数的情况完全可以转化为指数型来解决，最后根据要求保留实部或者虚部即可。所以本节讨论的 e^{ax} 中的 a 可以是任意的复数，即 $a \in \mathbb{C}$。

例 3.1. 求微分方程

$$y'' - y' + 2y = 10e^{-x} \sin x$$

的一个特解。

解. 首先将方程**复化**：

$$(D^2 - D + 2)\tilde{y} = 10e^{(i-1)x}$$

由于 $\sin x = \Im(e^{ix})$，所以最后 $\tilde{y}_p$ 的虚部就是一个特解。由**指数输入定理**：

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_p &= \frac{10e^{(i-1)x}}{(i-1)^2 - (i-1) + 2} \\
&= \frac{10e^{(i-1)x}}{-2i + i - 1 + 2} \\
&= \frac{10e^{-x}(\cos x + i \sin x)}{3 - 3i} \\
&= \frac{5}{3}(1+i)e^{-x}(\cos x + i \sin x)
\end{aligned}$$

取其虚部，故

$$y_p = \frac{5}{3}e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

到现在其实已经得到一个挺不错的结果了，但这其实还不够。注意到**指数输入定理**中要求 $P(a) \neq 0$，因为分母显然是不能为 0 的。但是在实际中，$P(a) = 0$ 的情况比比皆是。所以有以下命题：

命题 3.2 (指数移位法则)**.** $a \in \mathbb{C}$，则有：

$$P(D)e^{ax}u(x) = e^{ax}P(D+a)u(x)$$

证明. 为方便表示，我们将 $u(x)$ 写作 u，类似代换法则，其实只需要证明：

$$D^n e^{ax} u = e^{ax}(D+a)^n u$$

那么很明显可以利用数学归纳法：

(1) 当 $n=1$ 时，

$$De^{ax}u = ae^{ax}u + e^{ax}Du = e^{ax}(D+a)u$$

故该命题在 $n=1$ 时正确；

(2) 假设 $n=k-1$ 时命题正确，则当 $n=k$ 时：

$$\begin{aligned} D^k e^{ax} u &= D(D^{k-1} e^{ax} u) \\ &= D(e^{ax}(D+a)^{k-1}u) \\ &= e^{ax}(D+a)^k u \end{aligned}$$

故该命题正确。

□

这个命题的作用将在下一小节揭晓。

3.2 二阶微分方程

一般我们只会求解二阶常系数微分方程，因为正常人是不会解三次及以上（甚至五次及以上是没有根式解的）的方程的，所以我们先由二阶微分方程入手。
显然如果 $P(a) \neq 0$，前文已经有更强的结论可以解决这一问题，所以现在讨论 $P(a)=0$ 的情况。很明显，这点说明 a 是方程 $P(x)=0$ 的一个根。而学过**待定系数法**后也知道应该分两种情况讨论，第一种是**单根**，另一种则是**重根**。

定理 3.2 (单根指数输入定理)**.** 若 a 是 $P(x)=0$ 的一个单根，则有：

$$y_p = \frac{e^{ax}x}{P'(a)}$$

证明. 不妨设 $a, b(a \neq b)$ 是 $P(x)=0$ 的两个根，为方便起见，我们假设 $P(x)$ 的最高次项系数为 1。那么有：

$$P(D) = (D-a)(D-b)$$

所以

$$P'(D) = 2D - a - b$$

故有 $P'(a) = a - b$，于是将 y_p 代入原方程：

$$\begin{aligned} P(D)\frac{e^{ax}x}{P'(a)} &= \frac{e^{ax}P(D+a)x}{P'(a)} \\ &= \frac{e^{ax}(D+a-b)Dx}{a-b} \\ &= \frac{e^{ax}(a-b)}{a-b} \\ &= e^{ax} \end{aligned}$$

故 y_p 确实是原方程的特解。 □

定理 3.3 (二重根指数输入定理)**.** 若 a 是 $P(x) = 0$ 的重根，则有：

$$y_p = \frac{e^{ax}x^2}{P''(a)}$$

证明与前面一种相仿，把 $P(D) = (D-a)^2$ 代入检验即可，在此不再给出证明。

例 3.2. 求微分方程

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

的一个特解。

解. 由于 $P(D) = D^2 - 3D + 2$，而 1 恰好是 $P(x) = 0$ 的一个单根，故由单根指数输入定理：

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{e^x x}{P'(1)} \\ &= \frac{e^x x}{2-3} \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

3.3 一般情况下的指数输入定理

由二阶微分方程特解的形式，不难猜测当 a 是 $P(x) = 0$ 的 n 重根时，有：

$$y_p = \frac{e^{ax}x^n}{P^{(n)}(a)}$$

并且注意若 a 不是 $P(x) = 0$ 的根的话，可以把它理解为 0 重根，$P(D)$ 理解为 $P^{(0)}(D)$，则上式同样适用。因此有如下定理：

定理 3.4 (指数输入定理)**.** $a \in \mathbb{C}$ 且 a 是 $P(x) = 0$ 的 n 重根，则有：

$$y_p = \frac{e^{ax}x^n}{P^{(n)}(a)}$$

证明. 由于 a 是 n 重根，故可以将 $P(D)$ 表示为：

$$(D-a)^n\tilde{P}(D)$$

则：

$$P^{(n)}(D) = n!\tilde{P}(D) + (D-a)Q(D)$$

$Q(D)$ 表示另一个多项式诱导的算子，简单说就是后面那项有因式 $(D-a)$。于是 $P^{(n)}(a) = n!\tilde{P}(a)$。接着将 y_p 代回原方程：

$$\begin{aligned} P(D)\frac{e^{ax}x^n}{P^{(n)}(a)} &= \frac{e^{ax}P(D+a)x^n}{P^{(n)}(a)} \\ &= \frac{e^{ax}\tilde{P}(D+a)D^n x^n}{n!\tilde{P}(a)} \\ &= \frac{e^{ax}\tilde{P}(D+a)n!}{n!\tilde{P}(a)} \\ &= \frac{e^{ax}\tilde{P}(a)n!}{\tilde{P}(a)n!} \\ &= e^{ax} \end{aligned}$$

故 y_p 是原方程的特解。 □

至此已经完美解决了三角函数和指数函数及其复合的形式，其特解可以直接利用**指数输入定理**计算得到。就结论的形式都是待定系数法望尘莫及的。

4 $f(x)$ 为多项式

首先做几个简单的分析：

(1) 若 $P(D) = D$，也就是

$$y' = f(x)$$

那显然直接求导就可以了。

(2) 否则 $P(D)$ 应该是什么形式？我们可以理解 $P(D)$ 中必定有常数项，这是因为如果没有常数项，例如：

$$y'' - y' = f(x)$$

那么完全可以把它理解为 $p' - p = f(x)$，而 $p = y'$，求得 p 再积分就可以了。

这样分析之后，我们知道方程中理应当可以表示成：

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i y^{(i)} + a_0 y = f(x)$$

并且 $a_0 \neq 0$，否则我们可以通过适当换元解决这一问题。注意到右边的 $f(x)$ 是一个多项式，每次求导只会让它次数减少，且我们也知道存在某个特解是多项式的形式，然而左边存在 y 的项，那么这个特解 y_p 的次数必然不会超过 $f(x)$ 的次数。更大胆的想法就是 y_p 是 $f(x)$ 各阶导数若干项的线性组合。
先看一个简单的例子：

例 4.1. 求微分方程

$$-y' + y = x$$

的一个特解。

显然随便构造都可以得到一个特解 $y_p = x + 1$。这个方程用算子的方法可以写成：

$$(-D + 1)y = x$$

如果很大胆地把算子除到右边，则有：

$$y = \frac{x}{1 - D}$$

如果想到 $\frac{1}{1-D}$ 的泰勒级数：

$$\frac{1}{1 - D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \ldots$$

并且更加大胆地将其代入：

$$y = (1 + D + D^2 + \ldots)x = x + 1$$

神奇的事情发生了！一个特解得到了！由于多项式 x 是有限导的，所以 $D^2, D^3, \ldots$ 都没有必要考虑，因为其作用于 x 都会得到 0。
但是稍微学过无穷级数的人都会知道

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i \text{收敛到} \frac{1}{1 - x}$$

是有条件的，$x \in (-1, 1)$，而这个 D 是根本没有什么度量概念的！所以其实我们是在考虑 $\frac{1}{P(D)}$ 的**形式幂级数**，也就是不考虑其收敛性，只考虑其形式。
但是关键的问题是，这样做到底对不对？为什么对或者为什么不对。如果考虑 $1 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1}$ 这 n 项，那么就有：

$$(1 - D)(1 + D + D^2 \ldots + D^{n-1}) = (1 - D)\frac{1 - D^n}{1 - D} = 1 - D^n$$

~~他说我这也没用，我说我这有用。~~如果记 $Q_n(D) = 1 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1}$，那么我们期望答案是

$$Q(D)f(x) = \lim_{n\to\infty} Q_n(D)f(x)$$

那么将其代回方程，并且注意到将算子 D 作为多项式不定元的多项式（乘法[1]）是具有**结合律**的：

$$\begin{aligned} P(D)\left(Q(D)f(x)\right) &= \left(P(D)Q(D)\right)f(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}(1 - D^n)f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

[1]修订补，应指算子的多项式乘法具有结合律

所以现在要求解问题只需要把 $\frac{1}{P(D)}$ 的形式幂级数求出，这可以利用泰勒展开的方法或者利用**多项式除法**。个人觉得多项式除法更为完美，多项式的除法一般用的是**长除法**，并且原则是从高位向低位依次消去高次项，而在此处则反过来，从低位往高位消。

$$
\begin{array}{rlllll}
 & x^3 & +x^2 & +3x & -2 & \\
\hline
x+1) & x^4+2x^3 & +4x^2 & +x & +1 & \\
 & -x^4-x^3 & & & & \\
\hline
 & x^3 & +4x^2 & & & \\
 & -x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & +x & & \\
 & & -3x^2 & -3x & & \\
\hline
 & & & -2x & +1 & \\
 & & & 2x & +2 & \\
\hline
 & & & & 3 &
\end{array}
$$

上面是正常情况下的长除法，长除法可以对给定的被除式 $f(x)$，除式 $g(x)$，可以找到 $h(x)$，使得：

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x)$$

其中 $r(x)$ 次数小于 $f(x)$，即 $deg(r(x)) < deg(f(x))$。而对于一般的 $P(D)$，我们利用相反的方法，找到一个 $H(D)$，使得：

$$1 = P(D)H(D) + R(D)$$

而 $R(D)$ 的最低次数是可以无限增大的，于是我们记长除法第 k 次的余式为 $R_k(D)$，商式 $H_k(D)$，于是有：

$$P(D)H_k(D) = 1 - R_k(D)$$

并记

$$\lim_{k\to\infty} H_k(D) = H(D)$$
$$\lim_{k\to\infty} R_k(D) = R(D)$$

那么将 $H(D)f(x)$ 代入原方程：

$$\begin{aligned}
P(D)\left(H(D)f(x)\right) &= \left(P(D)H(D)\right)f(x) \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} P(D)H_k(D)\right)f(x) \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} (1 - R_k(D))\right)f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

所以很自然的，我们有如下定义：

定义 4.1. *若 $P(D)$ 中常数项不为 0，我们定义：*

$$\frac{1}{P(D)} := H(D)$$

那么由上文的讨论，当 $f(x)$ 为多项式时其特解形式已经得到了：

定理 4.1. 若 $f(x)$ 是有限次的多项式，那么对于微分方程 $P(D)y = f(x)$，其一个特解为：

$$y_p = \frac{1}{P(D)} f(x)$$

例 4.2. 求微分方程

$$y'' + y' + y = 3x^2 + 4x$$

的一个特解。

解. 利用多项式长除法求得

$$\frac{1}{P(D)} = 1 - D + D^3 + \dots$$

故：

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{P(D)}(3x^2 + 4x) \\ &= (1 - D + D^3 + \dots)(3x^2 + 4x) \\ &= 3x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

那么目前为止已经基本解决了常系数微分方程特解的问题，只剩下最后一个问题，如果是指数（包括了三角函数）和多项式结合的情况呢？

定理 4.2. 若 $f(x) = e^{ax} g(x)$，$g(x)$ 为有限次的多项式，则：

$$y_p = e^{ax} \frac{1}{P(D+a)} f(x)$$

其实如果前面的已经理解了，这步其实很容易得到，只不过是移位法则的推论。当然这个公式是否真的就完美了呢？其实不是，只要多试或者多想，就会发现，有可能会出现 $P(D+a)$ 常数项为 0 的情况。但这不足为虑，因为移位法则其实在表明这样一个事实：只要把 $P(D+a)y = f(x)$ 的特解乘上 e^{ax} 就是原方程特解。所以就回到了一开始讨论的问题，可以先把 D^k 提取出来，最后再一步步积分即可。
为了让结论"更正确"，我们对 $\frac{1}{P(D)}$ 的定义进行修正：

定义 4.2. 定义微分算子的倒数

$$\frac{1}{D^k} := \underbrace{\int \int \cdots \int}_{k\text{个} \int}$$

而对于任意定义在 $\mathbb{R}[D]$ 上的多项式 $P(D) = D^k Q(D)$，其中 $D \nmid Q(D)$，我们定义：

$$\frac{1}{P(D)} := \frac{1}{D^k} \frac{1}{Q(D)}$$

例 4.3. 求微分方程

$$y'' + 4y = x \cos x$$

的一个特解。

解. 复化：

$$(D^2+4)\tilde{y}=e^{ix}x$$

故：

$$\begin{aligned}\tilde{y}_p&=e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+4}x\\&=e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD+3}x\\&=e^{ix}(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}iD+\dots)x\\&=(\cos x+i\sin x)(\frac{x}{3}-\frac{2}{9}i)\end{aligned}$$

故：

$$y_p=\Re(\tilde{y}_p)=\frac{x}{3}\cos x+\frac{2}{9}\sin x$$

5 结语

本文有个很大的缺陷就是没有给出 $1\div P(D)$ 的一个例子，这是由于我实在不知道怎么用 LaTeX 写自定义的长除法，能力有限... 于是写了一个一般的多项式长除法，希望读者能受到启发。
微分算子法本身还是偏向技巧的，实用性的，但实际上就算不管它的解题效率高不高，其形式其实是非常优美的，原来导数这样的算子也能定义其逆运算，虽然本文是限定了 $f(x)$ 的范围然后才进行地讨论，在算子巨大用处中也可能只是冰山一角。但是多项式函数和指数函数其实是两类函数的典型代表——有限阶可导函数和无限阶可导函数，所以典型问题能不能引出更深的问题呢？在此我无法做出回答，本人水平和精力有限，并没有再深究了。
所以对于任给的 $f(x)$ 到底有没有办法求解？我不知道，但是可以利用级数这个强有力的工具去逼近我们的解。前文讨论中已经说明三角函数和指数型函数可解且有较优秀的解法，于是容易想到用傅里叶级数去拟合一个函数可以做到这点。所以理论上，已经可以较为优秀地解决常系数线性常微分方程了。