平面向量

Kingsiong Si

目录

1 引言

向量 (vector) 就是有方向的数量, 实际意义源自于物理. 高中考题中常见的题目一般涉及概念 (模长, 夹角公式, 坐标), 这一类题不再细述. 但并非只有这些考点, 如不重视容易导致一旦出现较难的题就会无从下手而浪费许多时间. 一般其他类型的题较为综合, 需要联系几何/代数意义或者两者都要, 仔细观察会发现平面向量题目变得难的时候, 往往是结合三角形的情况, 后面会有这专门加深此方面知识的部分.

基于此, 后文将重点介绍平面向量的一些典型题目, 介绍一些结论, 重要思想和常用定理, 并让读者对平面向量有更深的见解而不是纯粹为了做题. 也为了让读者更好体会题目原意, 后面题目中不会出现选择题.

2 所需知识及典型例题

2.1 所需知识

2.1.1 普通知识

1. 平面向量基本定理: 一个向量可以由两个不共线的平面向量**唯一**线性表示.(如果平面几何知识欠缺的话, 这一点很重要)

2. 三点共线 (定比分点)

3. 重心

4. 均值/柯西不等式

由以上的知识已经可以解出几乎所有题目.

2.1.2 高级知识

1. 三角形中线

 1.1 向量形式 (后文细述)

 1.2 中线定理 (三角的题非常好用)

2. 梅涅劳斯定理

3. 塞瓦定理

4. 构造平行线

5. **奔驰定理** (后文细述)

6. 三角形五心

2.2 典型例题

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$. 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值为____.

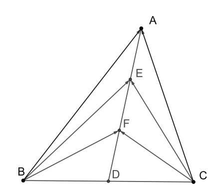


图 1: 题 1

分析: 注意这里出现了中线, 等分线段会带来对称性. 我们可以先利用这点对题中向量进行表示. 例如: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$, 而 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$, 因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\ &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA})(-\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{BD}^2\end{aligned}$$

即将一个数量积表示为两个数量之差, 这对解题是非常便利的. 先将其称为**中线定理的向量形式**. 知道这个结论, 那破解本题就轻而易举了.

解:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}^2-\overrightarrow{BD}^2=4\\&\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=-1\\&\Rightarrow 8\overrightarrow{DF}^2=5\\&\Rightarrow \overrightarrow{DF}^2=\frac{5}{8},\overrightarrow{BD}^2=\frac{13}{8}\\&\therefore \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2\\&=\frac{20}{8}-\frac{13}{8}=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

注意: 中线定理的向量形式是一个非常常用的小结论, 发现题目的本质才可以节约更多时间并且让可以题目的价值更大. **本题考点: 定理, 三角形**

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9,\sin B=\cos A\cdot\sin C,S_{\triangle ABC}=6$, P 为线段 AB 上的点, 且 $\overrightarrow{CP}=x\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+y\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$, 则 xy 的最大值为___.

解:

$$\begin{aligned}&\text{由}\sin B=\sin A\cos C+\cos A\sin C\\&\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}\\&\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=3,|\overrightarrow{BC}|=4,|\overrightarrow{BA}|=5\end{aligned}$$

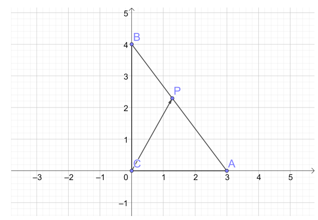


图 2: 题 2

因此, 以 C 为坐标原点, 分别以 CA,CB 为 x,y 轴正方向建立平面坐标系 $O-xy$.

$$\text{直线}AB\text{的方程为}:\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore 1&=\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\geq 2\sqrt{\frac{xy}{12}}\\&=\sqrt{\frac{xy}{3}}\Rightarrow xy\leq 3\end{aligned}$$

本题考点: 坐标, 三角形

3. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2,AD=1$, P 是对角线 AC 上一点, $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, 过点 P 的直线分别交 DA 延长线, AB, DC 与 M,E,N, 若 $\overrightarrow{DM}=m\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DN}=n\overrightarrow{DC}(m>0,n>0)$, 则 $2m+3n$ 的最小值为___.

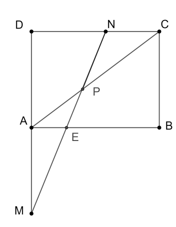


图 3: 题 3

分析: 由所求易知本题在于利用**三点共线**得到 $xm+yn=z$, 再利用**柯西不等式**. 其实由本题的完全四边形结构也应该判断出方法, 这是一个非常常见的结构, 重点在于利用两次三点共线, 再利用平面向量基本定理得到参数关系.

解:

$$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{n}\overrightarrow{DN},\overrightarrow{DA}=\frac{1}{m}\overrightarrow{DM}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP}&=\frac{3}{5}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{DC}\\&=\frac{3}{5m}\overrightarrow{DM}+\frac{2}{5n}\overrightarrow{DN}\\&\Rightarrow\frac{3}{5m}+\frac{2}{5n}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2m+3n&=(2m+3n)(\frac{3}{5m}+\frac{2}{5m})\\&=(2\times\sqrt{\frac{6}{5}})^2=\frac{24}{5}\end{aligned}$$

注意: 答案里面永远用的是均值不等式, 但此类最值利用柯西不等式来理解较为合适. **本题考点: 三点共线, 柯西不等式**

4. [2019 江苏] 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 中点, E 在边 AB 上, $BE=2EA$, AD 与 CE 交于点 O. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$, 则 $\frac{AB}{AC}$ 的值为____.

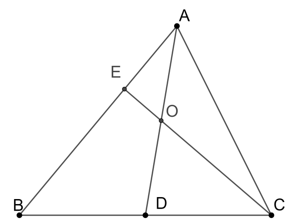


图 4: 题 4

本题十分经典, 同一种题型, 却反复不停地考. 当然本题有一个迷惑点, 就是给的是数量积关系最后要求比例, 实际上就是要找到 O 的位置, 因为一旦 O 能找到确切位置, 那么所有向量均可用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示, 数量积化向量为数量, 最后总可以有办法. 在此介绍三种方法, 都可以洞察实质, 但是角度不同.

解法 1(平行线分线段成比例):

过点 D 做 $DF\parallel CE$ 交 AB 于 F. 即 E,F 为三等分点, 也即 $\frac{AO}{OD}=1$. 故

$$\begin{aligned}6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}&=6\times 4(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\\&=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}(\text{题目已知})\\\Rightarrow&AC^2=\frac{1}{3}AB^2\\\therefore\frac{AB}{AC}&=\sqrt{3}\end{aligned}$$

解法 2(平面向量基本定理, 三点共线):

因为 $\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}(1-x)\overrightarrow{BA}$

又因为 $\overrightarrow{BO}=y\overrightarrow{BD}+(1-y)\overrightarrow{BA}=\frac{y}{2}\overrightarrow{BC}+(1-y)\overrightarrow{BA}$

联立即得: $y=\frac{1}{2}$, 即 O 是 AD 中点, 下同法一.

解法 3(梅涅劳斯定理):

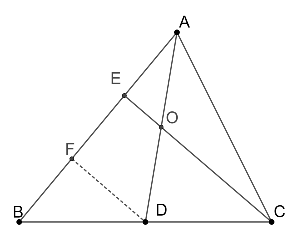


图 5: 题 4 法一

对 $\triangle ABD$ 和 l_{EOC}:

$$\begin{aligned} &\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BE}{EA}=1\\ &\Rightarrow\frac{AO}{OD}\times\frac{1}{2}\times 2=1\\ &\Rightarrow AO=OD\end{aligned}$$

3 三点共线

3.1 外接圆最值

此类题目较难产生变式, 但是解法思想巧妙.

例题: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, 点 O 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心. 设 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 求 $x+y$ 的最大值.

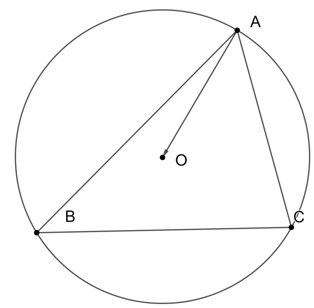
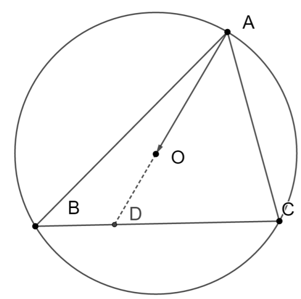


图 6: 例题



分析: 由三角形的相似不会对 x,y 产生任何影响, 所以不妨设 BC 为定值 1, 则转化为定圆定弦的问题 A 点在圆上运动. 那么现在关键在于 $x+y$ 这个变量如何求或者是转化成某个单一变量. 可以思考是否 $x+y$ 可以是另外一个变量. 对于 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$, 容易知道对于 BC 上的点 D, 将有 $\overrightarrow{AD}$ 由 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 的线性表示的系数和为 1. 所以问题在于 D 与 O 是否有关系, 如果随便找一个 D 可能看不出什么关系. 但是注意, 正因为 D 是可以任意的, 所以可以自行寻找最有利用价值的 D, 延长 $\overrightarrow{AO}$ 并交 BC 于点 D, 一旦 A,O,D 三点共线, 则 $\overrightarrow{AO}$ 可以由 $\overrightarrow{AD}$ 线性表示 (向量共线定理). 也就是 $x+y$ 可以转化为 $|\overrightarrow{AO}|$ 和 $|\overrightarrow{AD}|$ 的长度关系.

解:

延长 AO 交 BC 于 D.

$$\begin{gathered}\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\\ \text{两边同乘}\frac{|AD|}{|AO|}\text{得}:\overrightarrow{AD}=\frac{|AD|}{|AO|}(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\\ \therefore\frac{|AD|}{|AO|}(x+y)=1\\ \Rightarrow x+y=\frac{|AO|}{|AD|}\leq\frac{2}{3}\end{gathered}$$

对做法再一次进行分析:

1. $x+y$ 不容易进行计算, 因为外心是较为陌生的. 两个变量的关系未知, 两个都不知如何表示, 所以应该想办法化为单个变量;
2. $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 可以看作是一个提示, 三点共线;
3. A,O,D 三点共线则表示向量间的线性表示, 并且很重要的一点, $|AO|$ 为定长, 所以现在仅有一个变量 $|AD|$, 而这个的长度变化是显而易见的 (相当于 $|OD|$ 的变化).

其实只要有想法一般总是可以有办法的, 当然复杂度就可能不太一样了. x, y 到底能不能直接表示? 注意在定圆定弦中一种方法是不可忽视的—坐标及圆的参数方程. 例如本题, 可以以 O 为坐标原点, 以平行于 BC 的方向为 x 轴方向建立平面直角坐标系. A 用圆的参数方程表示, 则 $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 均可用坐标表示, 此方法应该可行, 本人没有试过, 读者自行尝试.

在此我还想讲另外一种想法. 就是高中物理中常见的矢量平行四边形分解. 将 $\overrightarrow{AO}$ 按 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 方向进行分解, 即过 O 分别作 AC, AB 的平行线, 分别交 AB, AC 于 E, F, 交 BC 于 M, N(如图所示). 则 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.
注意到: $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 共线, 因此 $x = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|MC|}{|BC|}$;
同理可得 $y = \frac{|BN|}{|BC|}$.
不妨设 $|BC| = 1$, 则 $x + y = |MC| + |BN| = 1 - |NM|$, 也就是说只要求解 $|NM|$ 的最小值即可. 余下的证明留给读者 (提示: $\angle NOM$ 为定值).

注: 涉及外心的向量题是很少的, 一般真正在考察外心的题目有两种, 一是我们刚刚讨论的这道题, 另外就是利用数量积的几何意义 (杂题的第 9 题可供参考).

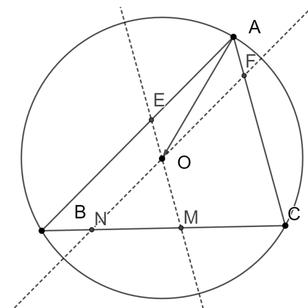


图 7: 例题的另一种思考方法

3.2 曲边最值

先看一道是高中生就会做到的题目.

在扇形 OAB 中, $\angle BOA = \frac{2\pi}{3}$, 点 C 在 $\widehat{AB}$ 上. 设 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 求 $2x + 3y$ 的最大值.

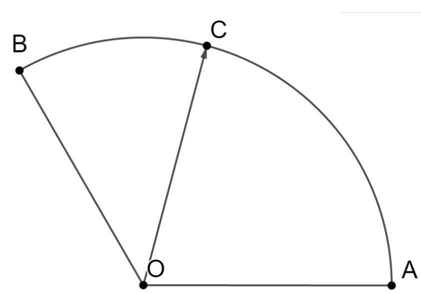


图 8: 例题

解法 1: 以 O 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{OA}$ 为 x 轴正方向建立平面直角坐标系. 不妨设 $|OA| = |OB| = 2$, 则 $A(2, 0), B(-1, \sqrt{3})$, 设 $C(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$. 于是有

$$\begin{cases} 2x - y = 2\cos\alpha \\ \sqrt{3}y = 2\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
2x+3y &= 2\cos\alpha + \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\sin\alpha \\
&= 2\cos\alpha + \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\alpha \\
&\le 2\sqrt{1+\frac{16}{3}} = 2\sqrt{\frac{17}{3}}
\end{aligned}
$$

解法 2(略带技巧): 依然是法一的坐标, 但是不利用参数方程.

$$
\begin{aligned}
&C(2x-y,\sqrt{3}y) \\
&\therefore (2x-y)^2+3y^2=4 \\
&4x^2+4y^2-4xy=4 \\
&x^2+y^2-xy=1 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

现在问题在于由 (1) 如何求得 $2x+3y$ 的最值. 这里将使用一个代换:

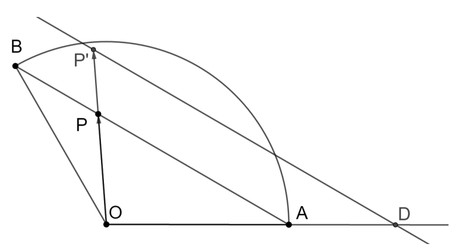
$$
\begin{cases}
x &= s+t \\
y &= s-t
\end{cases}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&2s^2+2t^2-s^2+t^2=1 \\
&\Leftrightarrow s^2+3t^2=1 \\
&2x+3y=2s+2t+3s-3t=5s-t
\end{aligned}
$$

再次进行三角代换即可.

附: 这里关键是代换后消去了 xy 项, 那么是否对任意的二次多项式均可消去 xy 项? 答案是肯定的, 高中知识不会知道其中根本, 当第一次见到此类代换会觉得很巧妙, 单考这种的题目在高考甚至模拟题都几乎不可能出现 (出现就想办法试出来, 可能稍微多花一点时间). 巧妙代换, 在此并不会将解法变得更简单, 仅供参考学习.



在此还有另一种方法, 在说这个方法之前我们先考虑另外一个问题—如果求的是 $x+y$ 呢? 在这里可能会想到是不是和前一道例题类似, 这是一个好的想法. 其实他们的本质都是构造**三点共线**. 那让我们思考一下, 如果 C 点在 AB 上, 那么很明显的 $x+y=1$. 但是现在的问题是 C 在圆弧上, 那应该如何处理? 注意, 这里的思想和前一道题有点类似, 如果将此直线平移, 那么当 C 或者说 P 在此直线上随意移动时, $x+y$ 在此的值不变, 就相当于 $\overrightarrow{OP}$ 等比例变化了, 这和前一题想法其实相同.

如上图, 记 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP'}=m'\overrightarrow{OA}+n'\overrightarrow{OB}$. 则由上文分析可以得到

$$\begin{aligned}m'+n' &= \frac{m'+n'}{m+n} \\ &= \frac{|OP'|}{|OP|} \\ &= \frac{|OD|}{|OA|}\end{aligned}$$

因此, 求解最大值即把"等值线"直线 AB 平移至与圆弧有交点的最"远"处也即相切的时候. 此时 $\frac{|OD|}{|OA|}$ 即为所求.

回到本题, 这边是 $3x+2y$, x,y 的系数不相同, 该怎么处理. 做一个处理以达到**化归**的目的:

$$3x \Rightarrow x'$$

$$2y \Rightarrow y'$$

那么现在问题等价于 $\overrightarrow{OC}=x'\frac{\overrightarrow{OA}}{3}+y'\frac{\overrightarrow{OB}}{2}$, 求 $x'+y'$ 的最大值. 取 $A'\in OA$ 且 $|OA'|=\frac{1}{3}|OA|$, 取 OB 中点 B'; 则 $A'B'$ 即为"等值线". 注意到圆与直线相切时, 过切点的半径与直线垂直. 所以可以设 $|OA|=1$, 并将 O 到 $A'B'$ 的距离计算出来, 其倒数即为所求. 求解过程留给读者完成.

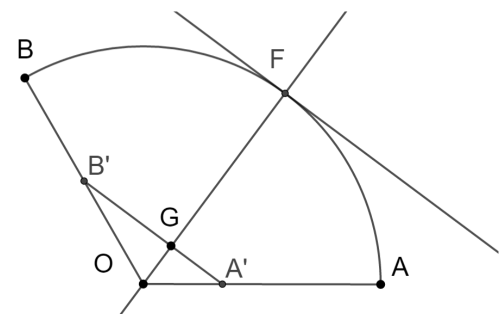


图 9: 解法 3

小结: 在这种模型, 解法 1 和解法 3 都是通用的, 解法 1 简单易懂便于计算. 但本小标题是"曲边最值", 因为题目也可以设置为不是圆弧的情况, 当曲线难以用参数方程 (变量少) 表示时, 法 1 会显得跛脚. 法 3 是一个值得去思考的方法, 而不仅仅只考虑在本题中计算复杂度的优劣.

4 向量与三角形

前文大部分题目也都是与三角形有关的题目, 在此还将介绍一个可以揭示三角形四心与向量的本质关系的定理—"奔驰定理".

先看一个例子:

设 $\triangle ABC$ 外心为 O, 重心为 G, 取点 H 使得 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, 求证:

(1) H 是 $\triangle ABC$ 的垂心;

(2) O,G,H 三点共线且 $OG:GH=1:2$

证明. (1)

$$\because \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$\therefore \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\overrightarrow{BC}=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$$

同理有 $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$, 因此 H 是垂心.

(2)

$$\begin{aligned}\vec{0}&=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\\&=3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}\\\Rightarrow 3\overrightarrow{GO}&=\overrightarrow{HO}\end{aligned}$$

□

分析: 本题重点在于向量线性运算的熟练, 进一步思考, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, 很显然满足此条件的 H 是存在的, 并且可以证明是垂心, 而三角形的垂心是惟一的, 也就是说垂心 H 必能满足此条件. 这里有点像在反向证明垂心的性质. 还有一点, 若取 BC 中点 D, 则 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$, 那么垂心 H 有性质:

$$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OD} \tag{2}$$

也可以说是 $|AH|=2|OD|$, 一般式 (2) 和结论 (2) 被称为**欧拉定理**. 以上即为欧拉定理的向量证明, 当然欧拉定理作为平面几何结论有平面几何的证明, 有兴趣者可以自行尝试, 便可证明垂心, 重心和外心在向量中的相关性. 欧拉定理在高中数学题目出现的概率很小, 有些会以其为背景, 知道此性质及其相关证明仍是有好处的.

下面我们介绍对一个解题更有帮助的定理.

定理 4.1 (奔驰定理)**.** *点 P 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $S_{\triangle PBC}$ 为 S_A, $S_{\triangle PCA}$ 为 S_B, $S_{\triangle PAB}$ 为 S_C. 则有*

$$S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0} \tag{3}$$

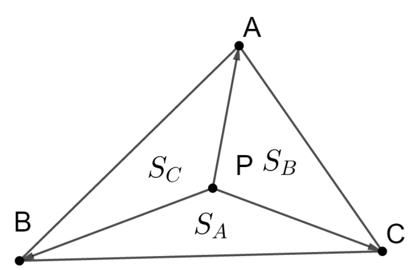


图 10: 奔驰定理

更加一般地, 若将面积用有向面积来理解, 则 P 可以是平面 ABC 中任一点. 但这个更一般只会加深理解的复杂度, 在此并不细述.

证明的第一个途径, 注意到 $S_A=\frac{1}{2}|PB|\cdot|PC|\sin\angle BPC$, 其与 $\overrightarrow{PA}$ 相乘出现对称性, 关键在于将 $\overrightarrow{PA}$ 转化为 $|PA|$. 就当前所学, 可以利用数量积.

证明.

$$\Leftrightarrow \sin\angle BPC|PB|\cdot|PC|\cdot\overrightarrow{PA}+\sin\angle CPA|PC|\cdot|PA|\cdot\overrightarrow{PB}+\sin\angle APB|PA|\cdot|PB|\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

令 $\vec{i}=\frac{\overrightarrow{PA}}{|PA|}$,

$$\begin{aligned}LHS\cdot\vec{i}&=|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|(\sin\angle BPC+\sin\angle CPA\cos\angle APB+\sin\angle APB+\cos\angle CPA)\\&=|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|(\sin\angle BPC+\sin(\angle CPA+\angle APB))\\&=|PA|\cdot|PB|\cdot|PC|(\sin\angle BPC+\sin(2\pi-\angle BPC))\\&=0\end{aligned}$$

同理, 令 $\vec{j}=\frac{\overrightarrow{PB}}{|PB|}$, 则 $LHS\cdot\vec{j}=0$. 即 LHS 这个向量与 $\vec{i},\vec{j}$ 同时垂直, 注意 $\vec{i}$ 与 $\vec{j}$ 不共线, 所以 $LHS=\vec{0}$. □

证明的第二个途径, 利用平面几何知识. 延长 AP 交 BC 于 D 以制造三点共线, 这样三个向量就可以构成一个线性组合, 之后再利用几何比例关系化简即可.

证明. 如图, 延长 AP 交 BC 于 D, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD}&=\frac{|DC|}{|BC|}\overrightarrow{PB}+\frac{|BD|}{|BC|}\overrightarrow{PC}\\-\frac{|PD|}{|PA|}\overrightarrow{PA}&=\frac{S_B}{S_B+S_C}\overrightarrow{PB}+\frac{S_C}{S_B+S_C}\overrightarrow{PC}\\-\frac{|PD|}{|AD|-|PD|}\overrightarrow{PA}&=\frac{S_B}{S_B+S_C}\overrightarrow{PB}+\frac{S_C}{S_B+S_C}\overrightarrow{PC}\\-\frac{S_A}{S_B+S_C}\overrightarrow{PA}&=\frac{S_B}{S_B+S_C}\overrightarrow{PB}+\frac{S_C}{S_B+S_C}\overrightarrow{PC}\\\Leftrightarrow S_A\cdot\overrightarrow{PA}&+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}\end{aligned}$$

□

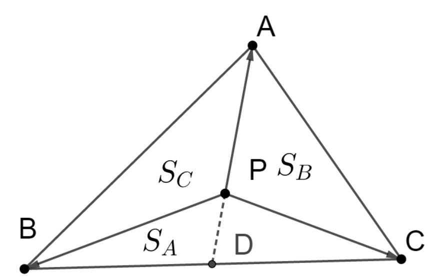


图 11: 证明的第二个途径

注: 此定理之所以被称之为奔驰定理, 似乎是因为形状像奔驰汽车的标志. 第一种证明主要利用对称性, 第二种则主要利用几何中线面比的转换. 且第一种方法中有一个思想非常新颖, 就是利用跟不共线向量数量积为 0 的向量为零向量, 此方法还可以用于空间向量. 注意当 P 为平面任一点时, 证法 1 仍然适用.

由此及三角形四心的基本性质立即得:

(1) 重心 G

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

(2) 外心 O

$$\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

(3) 内心 I

$$a\cdot\overrightarrow{IA}+b\cdot\overrightarrow{IB}+c\cdot\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow x_I=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}\qquad y_I=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\tag{4}$$

式 (4) 为内心坐标公式.

(4) 垂心 H

$$\tan A\cdot\overrightarrow{HA}+\tan B\cdot\overrightarrow{HB}+\tan C\cdot\overrightarrow{HC}$$

上述性质中, 最常用的是重心和内心, 其中重心性质众所周知, 不再赘述. 下面看两道例题.

1. * 点 I 是 $\triangle ABC$ 内心, 且满足 $\overrightarrow{IA}+\sqrt{2}\overrightarrow{IB}+\sqrt{3}\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. 求 $\triangle ABC$ 的形状.

解:

由内心性质可知

$$a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$$
$$\therefore a^2+b^2=c^2$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

2. [2017 福建预赛] 已知 P 为双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点, F_1,F_2 为双曲线 C 左右焦点, M,I 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心, 内心. 若 $MI\perp x$ 轴, 则 $\triangle ABC$ 内切圆半径为____.

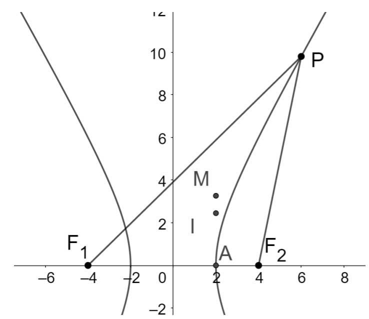


图 12: 例题 2

解:

由对称性, 不妨设 P 点在第一象限, 右顶点为 A.

$$\begin{aligned}|F_1A|&=\frac{1}{2}(|F_1F_2|+|PF_1|-|PF_2|)\\&=\frac{1}{2}(8+4)=6\end{aligned}$$

$\therefore A(2,0)$, 即 $x_I=x_M=2$

$\Rightarrow x_P=3x_M=6, y_p=4\sqrt{6}$

到此其实可以直接计算出 $|PF_1|$和$|PF_2|$ 的长度, 再利用内切圆半径和三角形面积关系可求半径. 但我们不妨再试试内心坐标公式 (4)

$$\begin{aligned}y_I&=\frac{4\sqrt{6}\times 8+0\times|PF_2|+0\times|PF_1|}{|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|}\\x_I&=\frac{8\times 6+4\times(|PF_1|-|PF_2|)}{|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|}\\&=\frac{4\times(12+4)}{|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|}=2\\&\Rightarrow(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)=32\end{aligned}$$

$\therefore r=y_I=\frac{32\sqrt{6}}{32}=\sqrt{6}$

注: 本题虽没有出现向量, 但是可以很容易改成一道 “向量题”.

5 杂题

5.1 题目

所谓杂题, 即难度无先后顺序.

1. * 平行四边形中的一点 O, 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{FE}$, 其中 E 为对角线交点, F 为 CD 中点. 若 $S_{ABCD}=1$, 则 $S_{\triangle ACO}=$___.

2. [2019 浙江] 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 当每个 $\lambda_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 取遍 ±1 时, $|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_2\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|$ 的最小值为___, 最大值为___.

3. [2016 福建预赛] 在空间四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=2,BC=3,CD=4,DA=5$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$____.

4. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 为平面向量, 若 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=$____.

5. 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 满足 $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|AB|^2$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的____ 心.

6. 已知点 O 是锐角三角形外接圆的圆心, $\angle A=\theta$, $\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{AO}$, 则实数 $m=$____.(用 θ 表示)

7. [2017 浙江] 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足: $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$, 则 $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最小值是____, 最大值是_____.

8. 已知单位向量 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 的夹角为 $120°$, $|x\vec{e_1}+y\vec{e_2}=\sqrt{3}(x,y\in R)$, 则 $|x\vec{e_1}-y\vec{e_2}|$ 的取值范围是____.

9. $\triangle ABC$ 的外心为 O, $|AB|=3,|AC|=4$, 则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为____.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的重心为 G, $\angle A,B,C$ 所对应的边为 a,b,c, 若 $2a\overrightarrow{GB}+\sqrt{3}b\overrightarrow{GB}+3c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, 则 $\sin A:\sin B:\sin C=$____.

5.2 答案及部分提示

1. $\frac{1}{16}$. 提示: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OE}$.

2. $0;2\sqrt{5}$. 提示: 利用几何意义, 贪心做法.

3. 7. 提示:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

并且注意 $2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD})$ 是 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$ 展开式中的项.

4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. 垂心. 提示: 垂线定理.

6. $\sin\theta$. 提示: 两边同乘 $\overrightarrow{AO}$.

7. $2;2\sqrt{5}$. 提示: 利用三角不等式和柯西不等式

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}| &\geq |\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}| \\
&= 2 \\
|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}| &= \sqrt{5+2\vec{a}\cdot\vec{b}}+\sqrt{5-2\vec{a}\cdot\vec{b}} \\
&\leq \sqrt{(1+1)(5+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5-2\vec{a}\cdot\vec{b})} \\
&= 2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

8. $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. 提示: 圆.

9. $\frac{7}{2}$. 提示: 几何意义.

10. $3 : 2\sqrt{3} : 2$.

6 其他说明

感谢为我提供题目的养正高 66 组的校友。

这是本人第一次使用 LaTeX 进行排版, 可能会有许多格式上的问题.

对于文中的题目, 有直接注明来源的, 在题目前标有 “*” 的是原创题, 都没有的就是其他练习或记忆中等无确切来源的题目.

对于文中的答案, 因为有的是原创题, 可能会有错误; 还有的是没有获得答案的题目而由本人自己提供的解法和答案, 因此可能也会有错误, 欢迎指正.